

Física de las ondas

Compilador: Josué Tago Pacheco*

Profesor de Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

1 de febrero de 2017

Resumen

Comprender la física de las ondas resulta fundamental para el Ingeniero Geofísico interesado en la Sismología y sus aplicaciones. Estas notas se apegan al temario de la asignatura de “Física de las Ondas” impartida en el 7.º Semestre de la carrera de Ingeniería Geofísica en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. Estos apuntes son esencialmente una compilación y traducción de secciones del libro de Stein y Wysession (2003).

Índice

1. Soluciones de las Ecuaciones de Movimiento en un Sólido Elástico Infinito:	
Ondas P y S	2
1.1. Los esfuerzos, la ecuación de movimiento y las deformaciones	3
1.1.1. Esfuerzos	3
1.1.2. Ecuación de movimiento	17
1.1.3. Deformaciones	19
1.1.4. Ecuaciones constitutivas	24
1.2. La ecuación de onda sísmica	27
1.2.1. Teorema de Helmholtz	28
1.2.2. Ecuación de onda en términos de potenciales	29
1.3. Conceptos básicos para ondas armónicas	30
1.3.1. Solución de onda armónica	30
1.3.2. Extensión a tres dimensiones	34
1.4. Ondas P y S	37

*josue.tago@gmail.com

2. Soluciones de las Ecuaciones de Movimiento en un Sólido Elástico con una o varias Interfases Planas (Ondas P, SH y SV)	39
2.1. Condiciones de frontera	40
2.2. La aproximación de un medio por capas	42
2.3. Potenciales de ondas planas para un medio por capas	43
2.4. Ángulo de incidencia y velocidad aparente	47
2.5. Ley de Snell	49
2.6. Ángulo crítico	51
2.7. Ley de Snell para ondas SH	53
2.8. Parámetro de rayo y lentitud	53
2.9. Principio de Fermat y Teoría de rayo geométrica	56
2.10. Coeficientes de reflexión y transmisión de ondas planas	58
2.10.1. Energía en una onda plana	60
2.11. Coeficientes de reflexión y transmisión de ondas SH	62
2.12. Flujo de energía de ondas SH reflejadas y transmitidas	64
2.13. Ondas SH postcríticas	67
2.14. Ondas $P - SV$ en la superficie libre	68
2.15. Interfaces sólido-sólido y sólido-líquido	73
2.16. Ejemplo	80
3. Ondas superficiales (Rayleigh y Love)	80
3.1. Introducción	80
3.2. Ondas Rayleigh en un semi-espacio homogéneo	82
3.3. Ondas Love en una capa sobre un semi-espacio	86
3.4. Dispersión de ondas Love	89
3.5. Velocidad de fase y grupo	95
4. Atenuación de ondas sísmicas	95
4.1. Introducción	96
4.2. Atenuación de un oscilador lineal	97
4.3. Factor de calidad, Q	101
4.4. Dispersión física debido a la atenuación	103
A. Apéndice	107
A.1. Transformación de coordenadas	107

1. Soluciones de las Ecuaciones de Movimiento en un Sólido Elástico Infinito: Ondas P y S

Objetivo: El estudiante comprenderá los conceptos de las ondas elásticas y analizará su propagación en medio homogéneos.

1.1. Los esfuerzos, la ecuación de movimiento y las deformaciones

La segunda ley de Newton establece que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre éste e inversamente proporcional a su masa. En otras palabras, esta ley explica que al aplicar una fuerza sobre un cuerpo se modifica su estado de movimiento, cambiando su velocidad en módulo o dirección. La segunda ley de Newton está dada por

$$\underline{F} = m\underline{a}, \quad (1.1)$$

donde $\underline{F}$ es el vector de fuerza aplicada, m y $\underline{a}$ son la masa y el vector de aceleración del cuerpo respectivamente.

Desde el marco teórico de la mecánica del medio continuo, la segunda ley de Newton nos permite describir la propagación de ondas en un material deformable continuo. Con este fin, se reescribe la segunda ley de Newton en términos de fuerza por unidad de volumen y densidad (masa por unidad de volumen). Si la densidad no cambia con el tiempo, la fuerza por unidad de volumen $\underline{f}(\underline{x}, t)$ es igual al término inercial¹, producto de la densidad ρ y la segunda derivada del vector de desplazamientos $\underline{u}(\underline{x}, t)$, tal que

$$\underline{f}(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.2)$$

El objetivo de esta subsección será la de utilizar la segunda ley de Newton para caracterizar a un medio continuo y su respuesta a fuerzas aplicadas. Primero se introducirá al *tensor² de esfuerzos* que describe las fuerzas actuando sobre un medio continuo deformable. Después, se formula la *ecuación de movimiento* (la segunda ley de Newton), la cual nos relaciona los esfuerzos con los desplazamientos. La variación del desplazamiento dentro del material genera la deformación interna descrita por el *tensor de deformaciones*. Esta deformación está relacionada con los esfuerzos a través de la *ecuación constitutiva* que caracteriza las propiedades del material.

1.1.1. Esfuerzos

Existen dos tipos de fuerzas que pueden actuar sobre un objeto. La primera es una *fuerza de cuerpo*, que actúa en todo el interior de un objeto, que da como resultado una fuerza neta proporcional al volumen del objeto. Un ejemplo de fuerza de cuerpo es aquella debido a la gravedad³ $\underline{g}$; la fuerza neta en un cuerpo infinitesimal con densidad ρ y volumen dV es $\rho \underline{g} dV$. Las unidades de una fuerza de cuerpo son de fuerza por unidad de volumen.

El segundo tipo de fuerza es la *fuerza de superficie*, la cual actúa en la superficie de un objeto, que conduce a fuerza neta proporcional al área del objeto. Por ejemplo, un

¹**Inercia:** Es la resistencia que opone la materia a modificar su estado de reposo o movimiento

²En matemáticas y en física, un **tensor** es una entidad algebraica de varios componentes que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido (ver la Sección 1.1.1.1).

³*Dato interesante:* Albert Einstein demostró que la fuerza de gravedad es una ilusión, un efecto de la geometría espacio-tiempo. La Tierra deforma el espacio-tiempo de nuestro entorno, de modo que el propio espacio nos empuja hacia el suelo.

objeto sumergido en un fluido es sujeto a una presión igual al peso (una fuerza) por unidad de área del fluido arriba del objeto. En cualquier punto de la superficie del objeto, la presión es dirigida a lo largo de la normal de la superficie. De modo que, una fuerza de superficie actúa en distintas direcciones en diferentes partes del objeto; en contraste con la gravedad que es una fuerza de cuerpo que actúa siempre hacia abajo. Las fuerzas de superficie tienen unidades de fuerza por unidad de área. Ahora considere

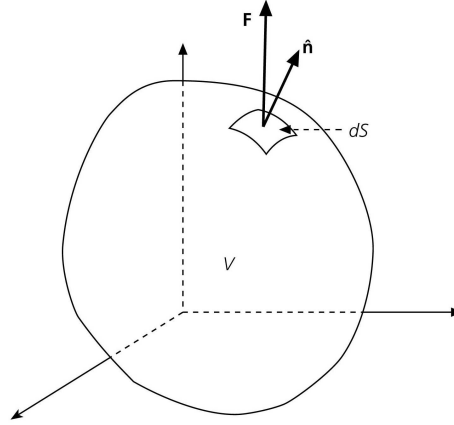


Figura 1: Fuerza de superficie dentro de un elemento de volumen V que forma parte de un material más grande. La fuerza de superficie $\underline{F}$ en el exterior del material V actúa en cada elemento de superficie dS , que tiene un vector normal unitario que apunta hacia afuera $\hat{n}$. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

las fuerzas que actúan sobre un volumen pequeño V , con superficie S , dentro de un medio continuo más grande (Fig. 1). El material dentro de V está afectado por fuerzas de cuerpo que actúan en todo el interior de V y fuerzas superficiales que actúan en la superficie S . Con la fuerza de superficie $\underline{F}$ que actúa en cada elemento de superficie dS , con vector normal unitario $\hat{n}$, se define el vector de tracción $\underline{T}$, como la fuerza de superficie por unidad de área en el límite

$$\underline{T}(\hat{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\underline{F}}{dS}. \quad (1.3)$$

El vector de tracción tiene la misma orientación que la fuerza, y es función del vector normal unitario $\hat{n}$ porque depende de la orientación de la superficie.

El sistema de fuerzas de superficie que actúan en un volumen se describe a través de tres vectores de tracción. Cada uno actúa sobre una superficie perpendicular a un eje coordenado. Se define $\underline{T}^{(j)}$ como el vector de tracción que actúa en la superficie cuyo vector normal está dada por $\hat{e}_j$. Los componentes de los tres vectores de tracción son $T_i^{(j)}$, donde el superíndice (j) indica la superficie y el subíndice i indica el componente. Por ejemplo, $T_3^{(1)}$ es el componente x_3 de la tracción sobre la superficie cuya normal es $\hat{e}_1$.

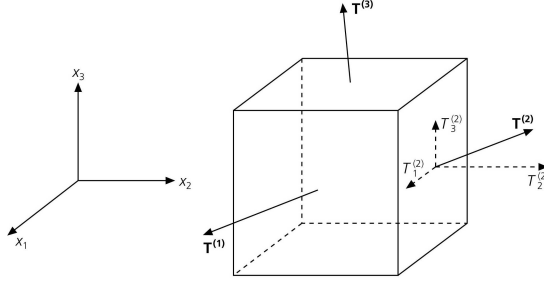


Figura 2: Vectores de tracción en tres caras de un elemento de volumen. Imagen tomada de Stein y Wysesession (2003).

El conjunto de los nueve términos que describen las fuerzas de superficie pueden ser agrupados en el *tensor de esfuerzos*, $\underline{\underline{\sigma}}$. Las filas del tensor son los tres vectores de tracción, tal que

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{T}^{(1)T} \\ \underline{T}^{(2)T} \\ \underline{T}^{(3)T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} & T_2^{(1)} & T_3^{(1)} \\ T_1^{(2)} & T_2^{(2)} & T_3^{(2)} \\ T_1^{(3)} & T_2^{(3)} & T_3^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Por lo tanto, el componente del tensor de esfuerzos σ_{ji} es el i -ésimo componente del vector de tracción que actúa en la superficie cuyo vector normal es $\hat{e}_j$. El esfuerzo representa la fuerza por unidad de área que el material del exterior ejerce sobre el material del interior. En la geometría de la Fig. 2, cuyas superficies están definidas por los ejes coordenados, es fácil notar que $\sigma_{ji} = T_i^{(j)}$.

En algunas aplicaciones, resulta más conveniente escribir los ejes coordenados como x , y y z , tal que

$$\sigma_{ji} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

El tensor de esfuerzos permite conocer el vector de tracción que actúa en cualquier superficie dentro del medio. Para ilustrar esto, se examina la tracción en un elemento arbitrario de superficie dS , cuyo vector normal $\hat{n}$ no es paralelo a un vector canónico. Considere el material dentro de un tetraedro infinitesimal de volumen dV formado por aquella superficie y otras tres caras perpendiculares a los ejes coordenados con normal $-\hat{e}_j$ (Fig. 3). El área de la cara con normal en la dirección $-\hat{e}_j$ está dada al utilizar el producto escalar para encontrar el coseno del ángulo entre $\hat{n}$ y $\hat{e}_j$,

$$(\hat{n} \cdot \hat{e}_j) dS = n_j dS. \quad (1.6)$$

Como la tracción es una fuerza por unidad de área, la fuerza de superficie neta en una dirección dada, se encuentra al multiplicar cada componente de la tracción por el área de la cara donde actúa y la suma sobre todas las caras. De modo que la fuerza total en la dirección $\hat{e}_i$ se debe a este componente de la tracción, aquellos de los esfuerzos

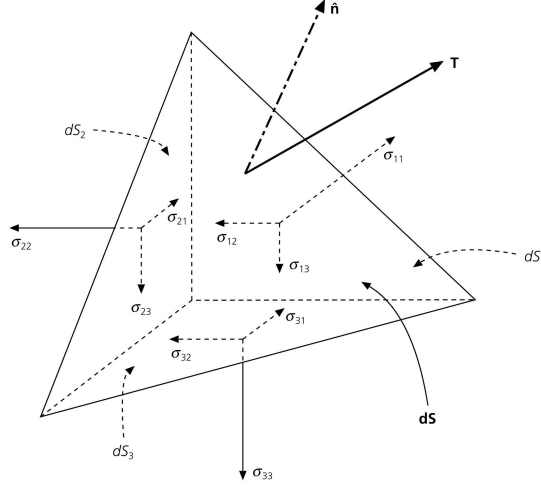


Figura 3: Componentes del tensor de esfuerzos en la cara de un tetraedro. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

en las otras tres caras y el componente de la fuerza de cuerpo $\underline{f}$ en esa dirección. Esta fuerza total es equivalente a la masa ρdV del tetraedro multiplicado por el componente de la aceleración en la dirección $\hat{e}_i$,

$$T_i dS - \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j dS + f_i dV = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV. \quad (1.7)$$

Dividiendo por el área y tomando el límite $dV/dS \rightarrow 0$, observamos que el tensor de esfuerzos está relacionado con la tracción y el vector normal por

$$T_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ji} n_j, \quad (1.8)$$

donde la última forma usa la convención de notación indicial donde índices que se repiten indican la suma. Como esta ecuación determina la tracción en una superficie arbitraria, el tensor de esfuerzos describe las fuerzas de superficie que actúan en cualquier volumen dentro del material.

La convención del signo para los componentes del esfuerzo proviene de la relación entre el vector normal hacia afuera y la base de vectores. La Fig. 4 muestra los componentes positivos de los esfuerzos que actúan en un cubo con caras perpendiculares a los ejes coordenados. Por ejemplo, en la cara con normal hacia afuera $\hat{e}_3 = (0, 0, 1)$, σ_{33} es positivo en la dirección $\hat{e}_3$ y σ_{31} es positivo en la dirección $\hat{e}_1$. Como las tracciones son $T_i = \sigma_{3i}$, σ_{33} y σ_{31} positivos conducen a fuerzas en las direcciones x_3 y x_1 respectivamente. Por el contrario, en la cara opuesta con normal hacia afuera $-\hat{e}_3 = (0, 0, -1)$, σ_{33} es positivo en la dirección $-x_3$ y σ_{31} es positivo en la dirección $-x_1$. Por lo tanto

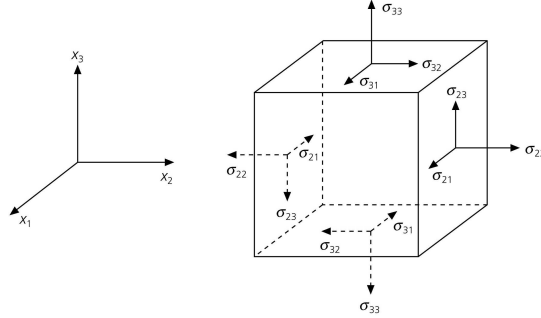


Figura 4: Componentes del tensor de esfuerzos en las cara de un elemento de volumen. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

las tracciones $T_i = -\sigma_{3i}$ inducen fuerzas en las direcciones $-x_3$ y $-x_1$.

Los tres componentes de la diagonal del tensor de esfuerzos, σ_{11} , σ_{22} y σ_{33} , son conocidos como *esfuerzos normales*, y los seis restantes fuera de la diagonal son los *esfuerzos de corte*. Los componentes correspondientes al vector de tracción son la tracción normal y la tracción de corte. La Fig. 4 muestra que el esfuerzo normal positivo tiende a expandir el volumen, mientras que el esfuerzo normal negativo tiende a disminuirlo. Por lo tanto, valores positivos de las tracciones normales son una *tensión*, mientras que valores negativos son una *compresión*. En la mayor parte del interior de la Tierra, como el material está sujeto a compresión por el peso de las rocas que soporta, los componentes del esfuerzo normal son negativos. Los Geofísicos comúnmente hablan del “máximo esfuerzo de compresión” el más negativo y más grande en valor absoluto, y del “mínimo esfuerzo de compresión”, el menos negativo y menos grande en valor absoluto.

Una propiedad importante del tensor de esfuerzos es que es *simétrico*

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.9)$$

Porque el tensor de esfuerzos es simétricos, la ec. (1.8) usualmente se escribe como

$$T_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij} n_j, \quad (1.10)$$

o en su forma vectorial como

$$\underline{T} = \underline{\sigma} \underline{\hat{n}}. \quad (1.11)$$

Los esfuerzos tienen unidades de fuerza por unidad de área. En el sistema cegesimal de unidades (cgs) basado en centímetro, gramo y segundo, la fuerza está dada en dinas (dyn), con $1 \text{ dyn} = 1 \text{ g-cm/s}^2$. Por lo que los esfuerzos están dados en dyn/cm^2 , o *bares*, una unidad equivale a 10^6 dyn/cm^2 . En el sistema internacional de unidades (SI) basado en metro, kilogramo y segundo, la fuerza está dada en Newtons (N), con $1 \text{ N} = 1 \text{ kg-m/s}^2$. Por lo que los esfuerzos están dados en *Pascales* (Pa), con $1 \text{ N} = 1 \text{ kg-m/s}^2$, por lo que en Pa, una unidad equivale a 1 N/m^2 . Los dos conjuntos de unidades

pueden relacionarse como $1 \text{ Pa} = 10^5 \text{ dyn}/10^4 \text{ cm}^2 = 10^{-5} \text{ bars}$, tal que 1 MPa es igual a 10 bars.

1.1.1.1. Los esfuerzos como un tensor Se ha utilizado el término “tensor” sin haberlo definido. Ya se revisó que los esfuerzos provienen de la relación entre los vectores de tracción y normales, y que es una entidad con dos subíndices que tienen propiedades similares a aquellas de los vectores. Los vectores son entidades independientes del sistema de coordenadas, de modo que las leyes físicas escritas con ellos no dependen del sistema de coordenadas utilizado y pueden ser analizados usando cualquier sistema de coordenadas conveniente. A continuación se demostrarán que los tensores son entidades similares.

De forma específica, un vector es una entidad que permanece igual en dos sistemas de coordenadas (ver Apéndice A.1), tal que sus componentes en dos sistemas de coordenadas Cartesianos están relacionados por la matriz de transformación $\underline{A}$. Por lo tanto, dados dos conjuntos de ejes (x_1, x_2, x_3) y (x'_1, x'_2, x'_3) , los componentes de un vector $\underline{u}$ están relacionados por

$$\underline{u}' = \underline{A}\underline{u}. \quad (1.12)$$

La relación entre los componentes del tensor de esfuerzos en dos sistemas coordenados Cartesianos puede ser encontrada usando el hecho de que este relaciona los vectores de tracción y normales en cada sistema coordenado. Los componentes de los vectores de tracción y normales en los dos sistemas coordenados satisfacen

$$\underline{T}' = \underline{A}\underline{T}, \quad \underline{\hat{n}}' = \underline{A}\underline{\hat{n}}. \quad (1.13)$$

La transformación inversa puede escribirse usando la inversa de $\underline{A}$ que, como $\underline{A}$ es ortogonal, es igual a su transpuesta

$$\underline{\hat{n}} = \underline{A}^{-1}\underline{\hat{n}}' = \underline{A}^T\underline{\hat{n}}'. \quad (1.14)$$

En el sistema de coordenadas primo, la tracción está relacionada con el vector normal y el tensor de esfuerzos por

$$\underline{T}' = \underline{\sigma}'\underline{\hat{n}}', \quad (1.15)$$

de modo que, por las ecs. (1.13) y (1.14),

$$\underline{T}' = \underline{A}\underline{T} = \underline{A}\underline{\sigma}\underline{\hat{n}} = \underline{A}\underline{\sigma}\underline{A}^T\underline{\hat{n}}'. \quad (1.16)$$

Comparando las ecs. (1.15) y (1.16) se tiene que

$$\underline{\sigma}' = \underline{A}\underline{\sigma}\underline{A}^T. \quad (1.17)$$

Esta ecuación define un tensor en coordenadas Cartesianas. Cabe recordar que aquello que define a un vector, más que sólo un conjunto de tres números, son sus propiedades de transformación entre sistemas coordenados de tal forma que lo preservan como una entidad independiente del sistema coordenado utilizado. De manera similar, una matriz

de números es un tensor sólo si se transforma entre sistemas coordenados de acuerdo a la ec. (1.17). Se derivó esta transformación a un tensor, en este caso el esfuerzo, que es un operador que relaciona dos vectores, el vector de tracción y el vector normal, de una forma específica sin importar el sistema coordenado. Como la aplicación de la matriz $\underline{A}$ transforma un vector, dos aplicaciones de la matriz $\underline{A}$ transforman un tensor. Desafortunadamente, los tensores son más difíciles de visualizar que los vectores. Aunque el tensor de esfuerzos pueda parecer complejo, es uno de los tensores más sencillos de interpretar.

Para ilustrar estas ideas, consideraremos como ejemplo la manera en que los compo-

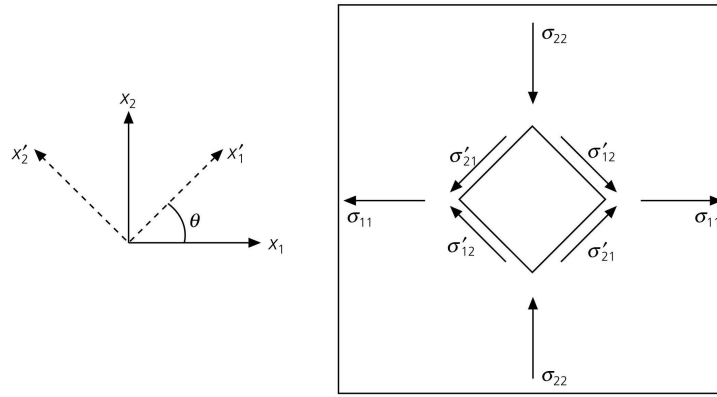


Figura 5: Componentes del tensor de esfuerzos diferentes para sistemas coordenados diferentes. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

nentes de esfuerzos cambian entre sistemas coordenados. Asuma un bloque de material, con caras perpendiculares a los ejes x_1 y x_2 , que es sujeto sólo a esfuerzos normales σ_1 y σ_2 (Fig. 5), tal que el tensor de esfuerzos es diagonal,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Ahora, considere que los esfuerzos actúan en un bloque más pequeño, con orientación diferente, dentro del bloque más grande. Para encontrar las tracciones en los lados del segundo bloque, se define un segundo sistema coordenado en donde los ejes x'_1 y x'_2 son normales a las caras del bloque y están rotados por θ con respecto a los ejes x_1 y x_2 , mientras que x_3 y x'_3 coinciden. Aunque los esfuerzos son los mismos en ambos bloques, los componentes del tensor de esfuerzos expresados en los dos sistemas

coordenados difieren. La relación entre los componentes está dada por

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\sigma'}} &= \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{A}}^T \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta & (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \theta \cos \theta & 0 \\ (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \theta \cos \theta & \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Por ejemplo, si $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$, y $\theta = 45^\circ$,

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Por lo tanto, a pesar de que el bloque más grande está orientado de manera que el tensor de esfuerzos causa tracciones normales solamente, compresión a lo largo del eje x_2 y tensión a lo largo del eje x_1 , el bloque pequeño está sujeto a tracciones de corte únicamente, debido a que cuenta con una orientación diferente. Este ejemplo muestra como los componentes del tensor de esfuerzos puede diferir en dos sistemas de coordenadas diferentes a pesar de representar la misma entidad, el estado físico de los esfuerzos.

1.1.1.2. Esfuerzos principales Para un estado de esfuerzos dado, el vector de tracción actúa en la mayoría de las superficies dentro del material con componentes normales y tangenciales. Sin embargo, existen algunas superficies con una orientación tal que los esfuerzos de corte se desvanecen. Estas superficies pueden ser caracterizados por sus vectores normales, llamados *ejes de esfuerzos principales*⁴; cuyos esfuerzos normales a estas superficies son llamados *esfuerzos principales*.

Para encontrar los esfuerzos principales, se usan los conceptos de eigenvalores y eigenvectores. Los componentes de la tracción de corte serán cero si la tracción y el vector normal son paralelos, tal que ellos difieren únicamente por una constante multiplicativa, λ ,

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = \lambda n_i. \quad (1.21)$$

Por lo tanto, los ejes de esfuerzos principales $\hat{n}$ son los eigenvectores del tensor de esfuerzos, y los esfuerzos principales λ están asociados a cada uno de los eigenvalores. Los eigenvalores y los eigenvectores pueden ser encontrados al resolver el sistema lineal de ecuaciones homogéneo

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0 \\
&\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.22)
\end{aligned}$$

⁴El concepto de ejes de esfuerzos principales es importante para caracterizar el mecanismo de la fuente sísmica

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker con valor igual a cero cuando $i \neq j$ y uno cuando $i = j$. Una solución no-trivial existe únicamente para aquellos valores de λ para los cuales la matriz es singular (no tiene inversa), lo cual ocurre cuando su determinante es cero

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (1.23)$$

Desarrollando el determinante se obtiene el polinomio característico

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (1.24)$$

cuyos coeficientes, los invariantes del tensor de esfuerzos, son independientes del sistema de coordenadas y están dados por

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad (1.25)$$

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$I_3 = \det \underline{\underline{\sigma}}. \quad (1.27)$$

Las raíces λ de la ec. (1.24) son los eigenvalores o esfuerzos principales, denotados por σ_m , que usualmente están ordenados de forma decreciente $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. En Geología, donde todos los esfuerzos son compresivos (negativos), usualmente se ordena los esfuerzos principales por magnitud, $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq |\sigma_3|$. Cada eigenvalor es entonces sustituido en la ec. (1.22) para encontrar los componentes del eigenvector asociado $\hat{n}^{(m)}$. Como el tensor de esfuerzos es simétrico, los tres eigenvectores son automáticamente ortogonales si sus raíces son distintas. De modo que son tres superficies mutuamente perpendiculares sobre las cuales no existe tracción tangencial.

Los ejes de esfuerzos principales son perpendiculares y pueden ser usados como una base vectorial de un sistema coordenado en el cual el tensor de esfuerzos es diagonal. Para transformar vectores en este nuevo sistema coordenado, usamos una matriz de transformación cuyas filas son los componentes de la base vectorial del nuevo sistema coordenado escrita en el sistema coordenado original. En este caso las filas son los eigenvectores, y la matriz de transformación es

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \hat{n}^{(1)T} \\ \hat{n}^{(2)T} \\ \hat{n}^{(3)T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Definiendo la matriz diagonal que contiene a los eigenvalores como

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

se pueden describir todos los eigenpares con la ec. (1.21) de forma matricial como

$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{\Lambda}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_1^{(2)} & n_1^{(3)} \\ n_2^{(1)} & n_2^{(2)} & n_2^{(3)} \\ n_3^{(1)} & n_3^{(2)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_1^{(2)} & n_1^{(3)} \\ n_2^{(1)} & n_2^{(2)} & n_2^{(3)} \\ n_3^{(1)} & n_3^{(2)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Llevando a cabo la transformación vectorial (ec. (1.17)) se muestra que el tensor de esfuerzos en el nuevo sistema coordenado es ahora diagonal,

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{\Lambda}}. \quad (1.31)$$

El tensor de esfuerzos es diagonal porque cada fila del tensor de esfuerzos contiene los componentes del vector de tracción que actúan en cada plano perpendicular al eje coordenado. Estos nuevos ejes coordenados fueron elegidos como los ejes de esfuerzos principales, tal que en las superficies con esas normales, la tracción normal es el único componente diferente de zero de los vectores de tracción.

1.1.1.3. Máximos esfuerzos de corte y fallamiento Una importante aplicación simbólica de los esfuerzos principales es que la teoría más simple de fractura de rocas predice que el fallamiento ocurre en el plano en el que el esfuerzo de corte es el más grande. A pesar de que esto no es exactamente cierto, ofrece una intuición entre las orientaciones de falla y la tectónica regional.

Dado el estado de esfuerzos, se puede encontrar el plano de máximo esfuerzo de corte

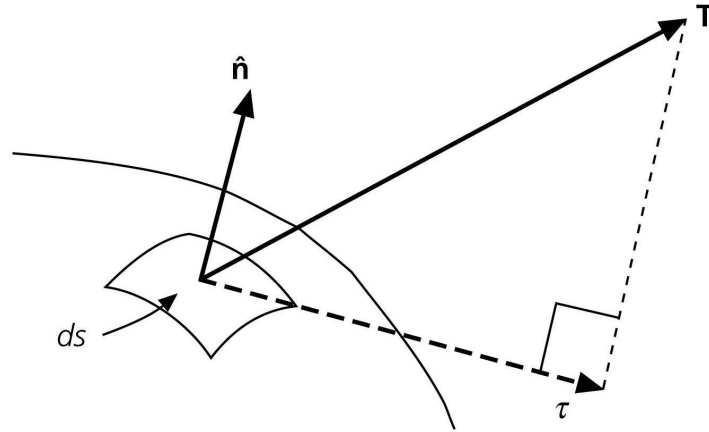


Figura 6: Vector de tracción actuando en un elemento de superficie. La tracción normal es paralela al vector normal, $\hat{n}$, mientras que la tracción tangencial $\underline{\tau}$ es paralela a la superficie. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

usando el tensor de esfuerzos diagonalizado (ec. (1.31)), y por lo tanto el sistema coordenado cuya base vectorial son los ejes de esfuerzos principales. Por la ec. (1.10) la

tracción en un plano con vector normal $\hat{n}$ es

$$T_i = \sigma'_{ij} n_j = \sigma_i \delta_{ij} n_j = \sigma_i n_i, \quad (1.32)$$

donde la suma sobre i no está implicada. La magnitud cuadrada de la tracción normal a la superficie es $(\underline{T} \cdot \hat{n})^2 = (T_i n_i)^2$, de modo, que usando la geometría triangular (Fig. 6), el cuadrado de la magnitud de la tracción tangencial τ , puede calcularse como

$$\begin{aligned} \tau^2(n_1, n_2, n_3) &= T_i T_i - (T_i n_i)^2 \\ &= (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 \\ &\quad - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Esta expresión permite encontrar los planos, caracterizados por sus vectores normales $\hat{n}$, en los cuales τ^2 es un máximo. Eliminando n_3 usando el hecho que $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$, se tiene

$$\begin{aligned} \tau^2(n_1, n_2) &= n_1^2(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) + n_2^2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2) + \sigma_3^2 \\ &\quad - [n_1^2(\sigma_1 - \sigma_3) + n_2^2(\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_3]^2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

En el valor máximo de τ^2 , sus derivadas con respecto a n_1 y n_2 son cero,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\tau \frac{\partial \tau}{\partial n_1} \\ &= 2n_1(\sigma_1 - \sigma_3)\{(\sigma_1 + \sigma_3) - 2[n_1^2(\sigma_1 - \sigma_3) \\ &\quad + n_2^2(\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_3]\}, \\ 0 &= 2\tau \frac{\partial \tau}{\partial n_2} \\ &= 2n_2(\sigma_2 - \sigma_3)\{(\sigma_2 + \sigma_3) - 2[n_1^2(\sigma_1 - \sigma_3) \\ &\quad + n_2^2(\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_3]\}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

La primera ecuación se satisface si $n_1 = 0$ y sustituyendo su valor en la segunda ecuación se obtiene $n_2^2 = 1/2$. Para estos valores se calcula $n_3^2 = 1/2$ y se obtiene un plano con vector normal unitario $\hat{n} = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Un segundo plano puede ser encontrado, al satisfacer la segunda ecuación con la elección $n_2 = 0$, con vector normal unitario $\hat{n} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. Eliminando n_1 de la ec. (1.33), utilizando el método usado para n_3 , siguiendo el mismo procedimiento se puede obtener un tercer plano con solución $\hat{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

Cada uno de estos planos bisecta⁵ el ángulo de 90 deg entre un par de ejes de esfuerzos principales. Porque son dos planos los que pueden definirse por cada par de ejes, existen otras soluciones a las previamente descritas. Por ejemplo, a partir de la condición $n_1 = 0$ se obtuvo $n_2^2 = n_3^2 = 1/2$, otra solución es $\hat{n} = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Para encontrar el valor de τ^2 como una función de $\hat{n}$, se reescribe la ec. (1.33) como

$$\begin{aligned} \tau^2(n_1, n_2, n_3) &= n_1^2 n_2^2 [\sigma_1 - \sigma_2]^2 + n_2^2 n_3^2 [\sigma_2 - \sigma_3]^2 \\ &\quad + n_1^2 n_3^2 [\sigma_1 - \sigma_3]^2. \end{aligned} \quad (1.36)$$

⁵Bisectar: Dividir en dos partes iguales.

Esta ecuación demuestra que de los tres posibles máximos locales de la tracción tangencial, el valor más grande es

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)/2, \quad (1.37)$$

donde σ_1 es el esfuerzo principal máximo y σ_3 es el esfuerzo principal mínimo. Esto ocurre en los planos con vectores normales

$$\hat{n} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \quad \text{y} \quad \hat{n} = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}). \quad (1.38)$$

Por lo que los planos de máximo esfuerzo de corte bisectan los ejes de esfuerzos de esfuerzos principales máximo $(1, 0, 0)$ y mínimo $(0, 0, 1)$.

Para aplicar esta teoría, considere un experimento en el que una roca es sujeta a com-

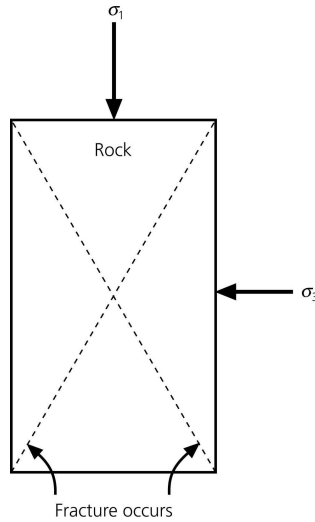


Figura 7: Esquema de un experimento en el cual una muestra de roca se comprime a lo largo de la dirección del esfuerzo principal máximo σ_1 hasta que ocurren fracturas. Los esfuerzos principales mínimos σ_2 y σ_3 son iguales. Si la roca se fractura, esto ocurre a 45 deg de la dirección del esfuerzo principal máximo. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

presión (Fig. 7) tal que los esfuerzos principales son negativos, con $|\sigma_1| \leq |\sigma_2| \leq |\sigma_3|$. Se espera que la fractura ocurra en los planos de máximo esfuerzo de corte. Por la ec. (1.38), existen dos posibles planos, cada uno a 45 deg tanto del eje de esfuerzo principal mayor como del menor. La probabilidad de que alguno de estos planos se fracture es la misma. De forma alternativa, si el experimento se conduce en una situación común de laboratorio llamada compresión uniaxial, donde $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| = |\sigma_3|$, la fractura podría ocurrir en cualquier plano a 45 deg del eje de esfuerzo principal σ_1 . Los experimentos respaldan la idea de que la fractura es controlada por los esfuerzos de corte, sin embargo la realidad es más complicada porque en ocasiones el fallamiento puede ocurrir a

25 deg, en lugar de 45 deg, del eje de esfuerzo principal máximo.

Por simplicidad se asume que las fallas en la Tierra ocurren en los planos de máxi-

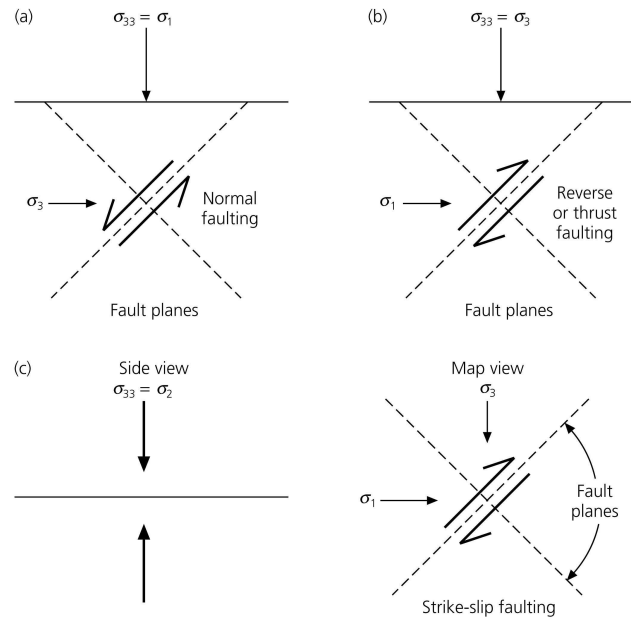


Figura 8: Campos de esfuerzos asociados con los tres tipos de fallamiento, asumiendo que el terremoto ocurre en un plano de máximo esfuerzo de corte. (a) Normal, (b) Inversa y (c) Corrimiento lateral o transformante. Imagen tomada de Stein y Wyession (2003).

mo esfuerzo de corte. En su superficie (contacto entre las rocas y la atmósfera), los esfuerzos de corte son cero de modo que uno de los ejes principales debe ser vertical, y los otros dos deben ser paralelos a la superficie. Las tres geometrías básicas de falla (transformante, normal e inversa) están relacionadas con los ejes de los esfuerzos principales (Fig. 8). Si el esfuerzo principal vertical es el más compresivo, la falla buza a 45 deg, y ocurre un fallamiento normal. Si por el contrario el esfuerzo principal es el menos compresivo, la geometría de la falla es la misma pero el fallamiento es inverso. Cuando el esfuerzo principal vertical es el intermedio de los esfuerzos principales, un movimiento de corrimiento lateral ocurre en un plano a 45 deg del eje de esfuerzo principal máximo. Por lo tanto, la geometría de las fallas, que puede ser mapeada de manera geológica o inferida de sismogramas, puede ser usado para estudiar las orientaciones de los esfuerzos. Este modelo está sujeto a limitaciones, especialmente porque los terremotos comunmente ocurren en fallas preexistentes. Sin embargo, este procedimiento es útil, especialmente cuando se integra con otros métodos para estimar las direcciones de los esfuerzos.

1.1.1.4. Esfuerzos deviatóricos Grandes esfuerzos de compresión ocurren en las profundidades de la Tierra debido al peso de las rocas que sostiene. Es conveniente en muchas aplicaciones remover el efecto total de compresión de los esfuerzos. De modo que se define el *esfuerzo promedio*

$$M = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 = \sigma_{ii}/3, \quad (1.39)$$

como $1/3$ de la suma de los esfuerzos normales, la traza del tensor de esfuerzos. El esfuerzo promedio está relacionado con los esfuerzos principales porque la traza del tensor de esfuerzos es independiente del sistema coordenado.

Para notar que la traza no cambia, se escribe la transformación del tensor de esfuerzos entre dos sistemas coordenados en términos de sus componentes,

$$\sigma'_{ij} = A_{ik}\sigma_{kl}A_{lj}^T = A_{ik}\sigma_{kl}A_{jl}. \quad (1.40)$$

La traza puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sigma'_{ii} &= \sigma'_{ij}\delta_{ij} \\ &= A_{ik}\sigma_{kl}A_{jl}\delta_{ij} \\ &= A_{ik}\sigma_{kl}A_{il} \end{aligned}$$

Como las columnas de la matriz de transformación $\underline{A}$ son ortonormales se tiene $A_{ik}A_{il} = \delta_{kl}$

$$\begin{aligned} &= \delta_{kl}\sigma_{kl} \\ &= \sigma_{kk}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Por lo tanto la traza es invariante bajo una transformación ortonormal, y es conocida como la primer invariante del tensor. Las otras dos invariantes, ec. (1.24), también se preservan para tales transformaciones.

El esfuerzo promedio puede entonces escribirse en términos de la traza del tensor de esfuerzos diagonalizado

$$M = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3, \quad (1.42)$$

como $1/3$ la suma de los esfuerzos principales. El tensor de esfuerzos deviatóricos se define al remover el efecto del esfuerzo promedio

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sigma_{ij} - M\delta_{ij} \\ \underline{\underline{D}} &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} - M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - M \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

De modo que, cuando los esfuerzos principales son muy grandes y casi iguales, el tensor de esfuerzos deviatóricos remueve su efecto y muestra el estado de esfuerzos remanente. El tensor de esfuerzos deviatórico puede ser diagonalizado y tiene los mismos los mismos ejes de esfuerzos principales que el tensor de esfuerzos.

Este concepto es importante al discutir los procesos en la tierra porque los esfuerzos deviatóricos resultan de las fuerzas tectónicas y causan el fallamiento y efectos de propagación de ondas sísmicas como la anisotropía. A profundidades mayores que unos

cuantos kilómetros, se asume que existe un estado de esfuerzos litostático, donde los esfuerzos normales son igual a menos la presión del material que soporta y los esfuerzos deviatoricos son cero. Como el peso de una columna de material de altura z y densidad ρ es $\rho g z$, la presión a una profundidad de 3 km debajo de una columna de roca con densidad de 3 g/cm^3 es

$$\begin{aligned} P &= (3 \text{ g/cm}^3)(980 \text{ cm/s}^2)(3 \times 10^5 \text{ cm}) \\ &\approx 9 \times 10^8 \text{ dyn/cm}^2 = 0.9 \text{ kbar}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

La aproximación de que la presión a 3 km de profundidad es aproximadamente 1 kbar (100 MPa) es muy práctica.

La presión causa compresión y por lo tanto valores negativos de los esfuerzos principales. Si el estado de esfuerzos es litostático, los esfuerzos promedio son iguales al negativo de la presión. Es útil recordar que el esfuerzo promedio es usualmente mucho más grande que los esfuerzos deviatoricos.

1.1.2. Ecuación de movimiento

Después de saber describir las fuerzas que actúan en la superficie de un elemento de material en términos de los esfuerzos, se escribirá la segunda ley de Newton (ec. (1.1)) en términos de las fuerzas de cuerpo y los esfuerzos. Este es el primer paso para derivar las ecuaciones que describen la propagación de ondas sísmicas.

Considere las fuerzas que actúan en un bloque de material de densidad ρ y volumen

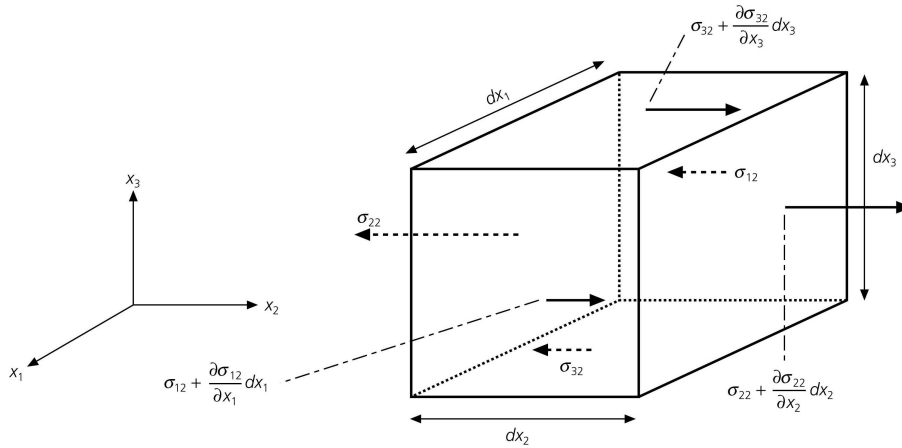


Figura 9: Componentes del tensor de esfuerzos que contribuyen a la fuerza en la dirección x_2 . Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

$dx_1 dx_2 dx_3$ con lados perpendiculares a los ejes coordenados (Fig. 9). La fuerza de cuerpo neta es $f_i dx_1 dx_2 dx_3$, donde f_i es la fuerza por unidad de volumen en el centro del bloque. La fuerza total es la suma de las fuerzas superficiales en cada cara más la

fuerza de cuerpo dentro del material.

Por ejemplo, la fuerza de superficie neta en la dirección x_2 es la suma de tres términos, cada uno de los cuales describe la fuerza neta debido a las diferencias en tracción entre caras opuestas. El primer término involucra la diferencia entre las tracciones en la dirección $\hat{e}_2$ que resulta del esfuerzo en la cara con normal $\hat{e}_2$ y aquel en la cara opuesta con normal $-\hat{e}_2$. Como el esfuerzo es fuerza por unidad de área, se multiplica la diferencia por el área de las dos caras, y se usa la serie de Taylor⁶ para obtener la fuerza neta debido a estas dos caras,

$$\begin{aligned} [\sigma_{22}(\underline{x} + dx_2\hat{e}_2) - \sigma_{22}(\underline{x})]dx_1dx_3 &= \left[\sigma_{22}(\underline{x}) + \frac{\partial\sigma_{22}(\underline{x})}{\partial x_2}dx_2 - \sigma_{22}(\underline{x}) \right] dx_1dx_3 \\ &= \frac{\partial\sigma_{22}(\underline{x})}{\partial x_2}dx_1dx_2dx_3. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Haciendo lo mismo para la fuerza en la dirección x_2 debido a los pares de caras con normales $\pm\hat{e}_1$ y $\pm\hat{e}_3$. Sumando los tres términos, el componente de la fuerza de cuerpo e igualando esta fuerza neta con la densidad multiplicada por este componente de la aceleración se obtiene

$$\left[\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} \right] dx_1dx_2dx_3 + f_2dx_1dx_2dx_3 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} dx_1dx_2dx_3.$$

Los primeros tres términos son la fuerza neta de las tracciones que actúan en las caras opuestas del cubo. A partir de la expansión con series de Taylor, cada componente de los esfuerzos es cancelado con su valor de la cara opuesta. De modo que únicamente la derivada parcial de ese componente contribuye a la fuerza neta. Por lo tanto, la variación espacial del campo de esfuerzos, más que el campo de esfuerzos mismo, causan la fuerza neta. Dividiendo por el volumen del bloque se tiene

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\sigma_{j2}}{\partial x_j} + f_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}. \quad (1.46)$$

Ecuaciones similares se aplican para los componentes x_1 y x_3 de la fuerza y aceleración. El conjunto de las tres ecuaciones pueden escribirse, utilizando notación indicial, como

$$\frac{\partial\sigma_{ji}(\underline{x}, t)}{\partial x_j} + f_i(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\underline{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.47)$$

En esta ecuación el hecho de que los esfuerzos, fuerzas y desplazamientos puedan variar tanto en tiempo como en espacio se escribe de forma explícita. De manera alternativa como el tensor de esfuerzos es simétrico, se puede escribir como

$$\frac{\partial\sigma_{ij}(\underline{x}, t)}{\partial x_j} + f_i(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\underline{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.48)$$

⁶La *serie de Taylor* de una función f real o compleja infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo a es la siguiente serie de potencias

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Note que la fuerza en la i -ésima dirección se obtiene al sumar sobre todas las caras del bloque. Si la derivada parcial con respecto a x_j se denota con una coma, entonces la ec. (1.48) se reescribe como

$$\sigma_{ij,j}(\underline{x}, t) + f_i(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\underline{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.49)$$

Esta ecuación, llamada *ecuación de movimiento*, se satisface en todas partes en un sistema continuo. Esta expresa la segunda ley de Newton, $\underline{F} = m\underline{a}$, en términos de fuerzas de superficie y cuerpo. La aceleración resulta de la fuerza y la divergencia⁷ del tensor de esfuerzos $\sigma_{ij,j}$. Un campo de esfuerzos que no varía con la posición no tiene divergencia, y por lo tanto no produce una fuerza. Es interesante notar que la divergencia del tensor de esfuerzos da lugar a una fuerza, que es un vector, como la divergencia de un vector conduce a un escalar.

Una importante forma de la ecuación de movimiento describe un cuerpo en equilibrio, cuya aceleración es cero, de modo que la divergencia del tensor de esfuerzos balancea las fuerzas de cuerpo

$$\sigma_{ij,j}(\underline{x}, t) = -f_i(\underline{x}, t). \quad (1.50)$$

Esta *ecuación de equilibrio* debe satisfacerse para cualquier problema de elasticidad estática, como encontrar los esfuerzos debido únicamente a la gravedad.

Otra forma importante se obtiene al no aplicar fuerzas de cuerpo

$$\sigma_{ij,j}(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\underline{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.51)$$

Esta forma es llamada *ecuación de movimiento homogénea*, donde el término “homogéneo” hace referencia a la falta de fuerzas de cuerpo (terminología adoptada del sistema lineales de ecuaciones). Esta ecuación describe la propagación de ondas sísmicas excluyendo a la fuente, como un terremoto o una explosión, donde fuerzas de cuerpo generan las ondas sísmicas.

1.1.3. Deformaciones

Si los esfuerzos son aplicados a un material que no es rígido, puntos dentro de este se mueven con respecto a cada uno, se presenta una deformación. El *tensor de deformación* describe la deformación resultante al movimiento diferencial dentro de un cuerpo.

Considere un elemento de un material sólido dentro del cual desplazamientos $\underline{u}(\underline{x})$ han ocurrido. Si un punto original en $\underline{x}$ es desplazado por $\underline{u}$ (Fig. 10), se describe el desplazamiento de un punto cercano, originalmente a $\underline{x} + \delta\underline{x}$, al expandir los componentes del vector de desplazamiento con una serie de Taylor,

$$u_i(\underline{x} + \delta\underline{x}) \approx u_i(\underline{x}) + \frac{\partial u_i(\underline{x})}{\partial x_j} \delta x_j = u_i(\underline{x}) + \delta u_i, \quad (1.52)$$

tal que el desplazamiento relativo cercano a $\underline{x}$, δu_i , es de primer orden

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i(\underline{x})}{\partial x_j} \delta x_j, \quad (1.53)$$

⁷La *divergencia* es un operador que describe la variación espacial de un campo.

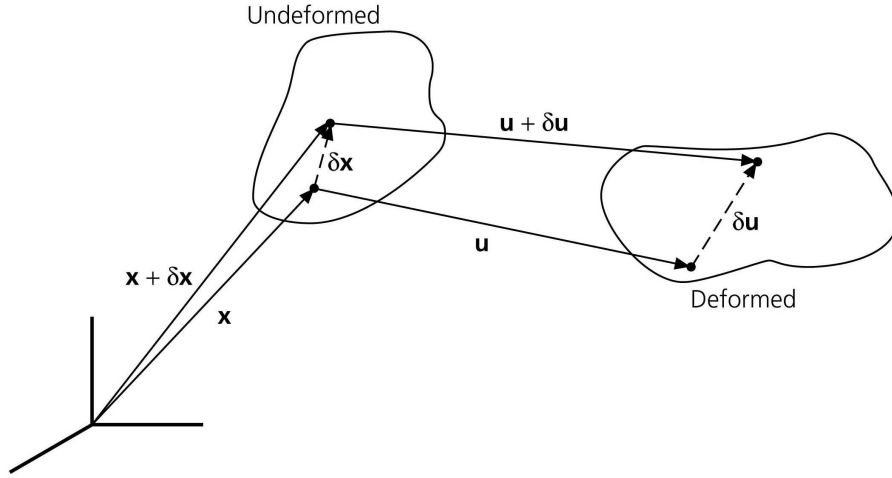


Figura 10: Esquema que muestra como la deformación se presenta del movimiento de desplazamiento relativo $\delta \underline{u}$ entre dos puntos originalmente separados por $\delta \underline{x}$. Imagen tomada de Stein y Wysesession (2003).

donde las derivadas parciales son evaluadas en $\underline{x}$.

A pesar de estar interesados en la deformación que moldea un cuerpo, pueden haber también traslaciones o rotaciones de cuerpo rígido, ninguna de las cuales produce deformación. Para distinguir los efectos, se suma y resta $\partial u_j / \partial x_i$ a la ec. (1.53) y se separa en dos partes

$$\delta u_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta x_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta x_j = (e_{ij} + \omega_{ij}) \delta x_j. \quad (1.54)$$

El término ω_{ij} corresponde a la rotación de cuerpo rígido sin deformación. Para observar esto, note que debido a que ω_{ij} es antisimétrico ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$), los términos de la diagonal son cero, y existen solamente tres componentes independientes. Entonces se puede formar un vector $\underline{\omega}$ con componentes

$$\omega_k = \epsilon_{stk} u_{s,t} / 2, \quad (1.55)$$

donde ϵ_{stk} es el símbolo de permutación⁸ y $u_{s,t}$ es la derivada parcial con respecto a x_t del s -ésimo componente del desplazamiento. Usando la identidad

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{stk} = \epsilon_{kij}\epsilon_{kst} = \delta_{is}\delta_{jt} - \delta_{it}\delta_{js}, \quad (1.56)$$

se encuentra que

$$\epsilon_{ijk}\omega_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{stk}u_{s,t}/2 = (u_{i,j} - u_{j,i})/2 = \omega_{ij}. \quad (1.57)$$

Por lo que el último término de la ec. (1.54) puede escribirse como

$$\omega_{ij}\delta x_j = \epsilon_{ijk}\omega_k\delta x_j = -(\underline{\omega} \times \delta \underline{x})_i, \quad (1.58)$$

que es el desplazamiento de una rotación rígida de $|\omega|$ con respecto a un eje en la dirección ω . Por lo tanto este término no induce una deformación.

El otro término en la ec. (1.54), e_{ij} , es el *tensor de deformación*, un tensor simétrico que describe la deformación interna con componentes

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

que son las derivadas especiales del campo de desplazamiento, $\underline{u}(\underline{x})$. Si el campo de desplazamiento no varía, sus derivadas son cero, no existe deformación y se trata únicamente de una traslación de cuerpo rígido.

El tensor de deformaciones puede ser escrito en términos de los ejes x, y, z usando las derivadas de los componentes del vector de desplazamiento (u_x, u_y, u_z)

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

Los componentes del tensor de deformaciones son adimensionales porque tienen unidades de longitud divididos por longitud. Sus componentes son de dos tipos diferentes. Los componentes de la diagonal muestran como el desplazamiento en la dirección de un eje coordenado varía a lo largo de ese eje. Por ejemplo, si el desplazamiento ocurren en la dirección x_1 ($u_2 = 0, u_3 = 0$) y u_1 solamente cambia en esa dirección, entonces

⁸El símbolo de permutación ϵ_{ijk} , está definido como

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= 0 && \text{si cualesquiera de los índices son iguales,} \\ \epsilon_{ijk} &= 1 && \text{si } i, j, k \text{ están en orden, i.e. } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ o } (3, 1, 2) \\ \epsilon_{ijk} &= -1 && \text{si } i, j, k \text{ no están en orden, i.e. } (2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2). \end{aligned}$$

Usando el símbolo de permutación se puede escribir el producto cruz como

$$(\underline{a} \times \underline{b})_i = \epsilon_{ijk}a_jb_k.$$

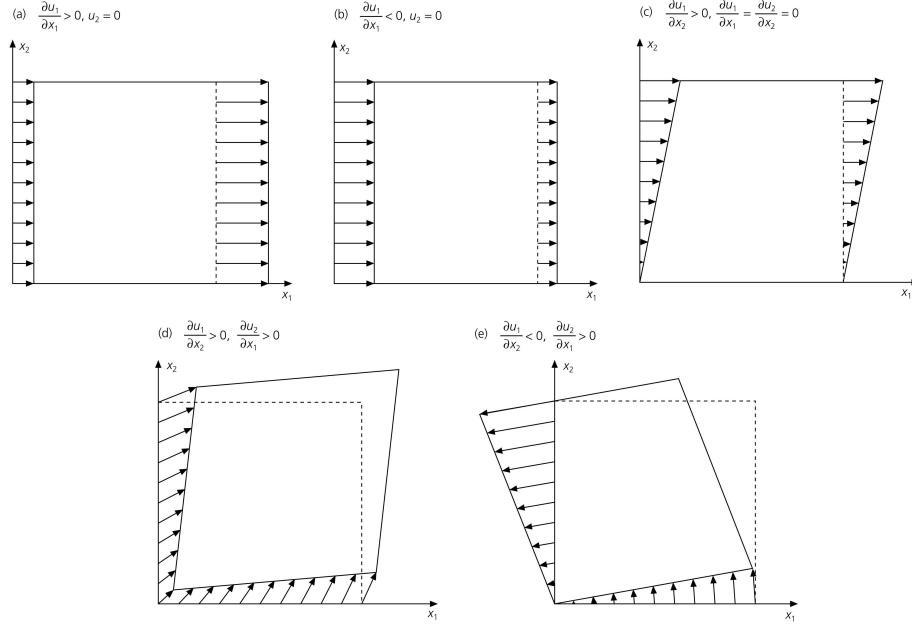


Figura 11: Posibles deformaciones en un elemento bidimensional. Imagen tomada de Stein y Wysesession (2003).

el único componente diferente de cero del tensor es e_{11} . Extensión ocurre a lo largo del eje x_1 si $\partial u_1/\partial x_1 > 0$ (Fig. 11a) y contracción ocurre si la derivada es negativa (Fig. 11b). Si e_{11} fuese constante dentro del material, esta igualaría el cambio de longitud por unidad de longitud a lo largo del eje x_1 . Los otros elementos de la diagonal, e_{22} y e_{33} , representan deformaciones similares a lo largo de sus ejes coordenados.

Los elementos fuera de la diagonal describen cambios del desplazamiento a lo largo de un eje coordenado con respecto a otra dirección. Un caso simple (Fig. 11c) es cuando sólo $u_1 \neq 0$, pero u_1 cambia solamente a lo largo del eje x_2 , tal que sólo e_{12} y e_{21} son diferente de cero. También se puede hacer que tanto $\partial u_1/\partial x_2$ y $\partial u_2/\partial x_1$ sean diferente de cero (Fig. 11d,e). Dependiendo de los valores relativo de las derivadas, el componente de deformaciones describe distintos tipos de deformación.

El tensor de deformaciones puede ser caracterizado por sus eigenvectores, los ejes de deformaciones principales, y sus eigenvalores asociados, las deformaciones principales. El tensor de deformaciones es diagonal cuando se expresa en un sistema coordenado cuya base vectorial son los ejes de deformaciones principales. La traza o suma de los términos de la diagonal del tensor de deformaciones,

$$\theta = e_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \underline{u}, \quad (1.61)$$

conocido como la *dilatación*, que es igual a la divergencia del campo de desplazamiento $\underline{u}(\underline{x})$. La dilatación tiene un significado físico porque mide el cambio de volumen por

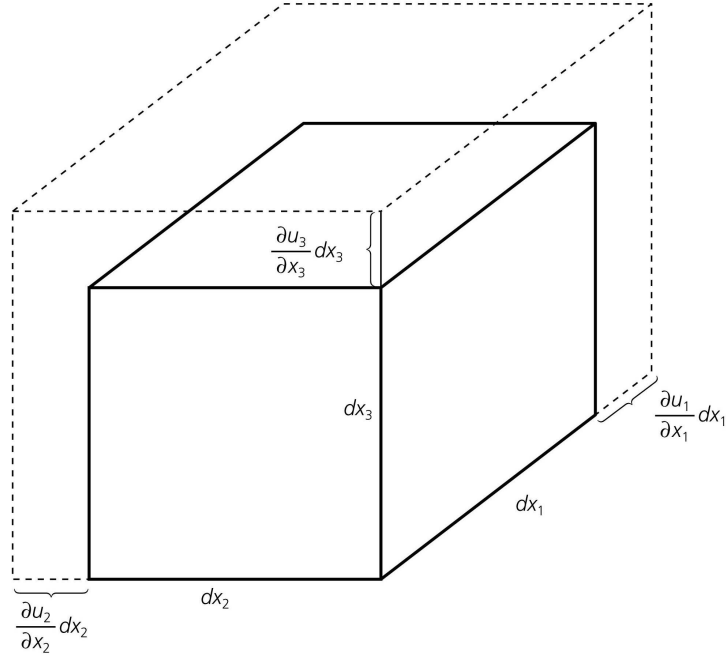


Figura 12: Cambio de volumen debido a deformaciones principales. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

unidad de volumen asociado a la deformación. Para notar esto, note que en los ejes de deformaciones principales un bloque de material con un volumen inicial $dx_1 dx_2 dx_3$ tiene un volumen después de someterse a deformación (Fig. 12) de

$$\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \quad (1.62)$$

que, hasta primer orden,

$$\approx \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = (1 + \theta) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (1.63)$$

Por lo tanto, si se define el volumen inicial como $V = dx_1 dx_2 dx_3$,

$$V + \Delta V = (1 + \theta)V \rightarrow \theta = \Delta V/V, \quad (1.64)$$

y la dilatación es el cambio en volumen por unidad de volumen.

Cabe mencionar que se ha discutido el tensor de deformaciones en coordenadas Cartesianas. Este tensor es más complicado cuando se formula en otro sistema coordenado.

1.1.4. Ecuaciones constitutivas

Distintos materiales responden de manera diferente a un esfuerzo aplicado. Para un esfuerzo dado, un material más rígido responde con menor deformación que la que ocurre en un material menos rígido. La relación entre el esfuerzo y la deformación está dada por la ecuación constitutiva del material.

Los tipos más simples de materiales son los elásticos lineales, tal que existe una relación lineal entre los tensores de esfuerzos y deformaciones. Se verá más adelante que cuando la tierra tiene un comportamiento lineal elástico, surgen las ondas sísmicas. La elasticidad lineal es válida para una escala pequeña de tiempo en la propagación de ondas sísmicas, pero no para escalas de tiempo mayores. En tiempos de escala de miles de años o más, las rocas del manto fluyen como un fluido viscoso.

Asumiendo que el material es elástico, también se asume que los desplazamientos para un estado inicial sin deformación son pequeños. Esta suposición, conocida como *teoría infinitesimal de deformación*, es generalmente válida para ondas sísmicas. Por ejemplo, una onda de cuerpo puede tener un desplazamiento del orden de 10 microns y una longitud de onda del orden de 10 km. Expresando todas estas cantidades en metros, la deformación resultante es cerca de $(10^{-5}/10^4) = 10^{-9}$, que resulta lo suficientemente pequeña para que la teoría infinitesimal sea válida. Sin embargo, para deformaciones mayores de 10^{-4} , esta relación lineal entre los esfuerzos y las deformaciones falla. Esto ocurre en regiones del manto bajo altas presiones, o cuando las rocas se rompan durante un sismo.

Los esfuerzos y la deformaciones para un material lineal elástico están relacionados por la ecuación constitutiva llamada *ley de Hooke*,

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}e_{kl}. \quad (1.65)$$

Las constantes c_{ijkl} , módulo elástico, describen las propiedades del material. Para entender como el módulo elástico afecta la ecuación de movimiento, se escribe la ecuación constitutiva (1.65) usando el hecho de que las deformaciones son derivadas del desplazamiento

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{k,l}. \quad (1.66)$$

Sustituyendo esta expresión en la ec. (1.49) se obtiene la ecuación de movimiento en términos de los desplazamientos

$$\sigma_{ij,j}(\underline{x}, t) + f_i(\underline{x}, t) = (c_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + f_i(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\underline{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.67)$$

Por lo tanto el módulo elástico controla como los desplazamientos evolucionan en tiempo y en espacio en respuesta a una fuerza aplicada, y entonces, como se verá más adelante, determina la velocidad de las ondas sísmicas.

El módulo elástico c_{ijkl} es el tensor más complicado que se ha tratado hasta el momento. Cuenta con cuatro subíndices y relaciona los tensores de esfuerzos y deformaciones, cada uno de estos con dos subíndices. Esta situación es análoga en el sentido en que el tensor de esfuerzos, con dos subíndices, relaciona a los vectores normales y de tracción, con un subíndice cada uno. Como los subíndices tienen un rango del 1 al 3, c_{ijkl} tiene $3^4 = 81$ componentes. Afortunadamente, el número de componentes independientes

se reduce por cuestiones de simetría. Como los tensores de esfuerzos y deformaciones son simétricos

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}, \quad (1.68)$$

de modo que el número de componentes independientes es 36 porque hay sólo 6 componentes independientes en los tensores de esfuerzos y deformaciones.

Otra relación de simetría es

$$c_{ijkl} = c_{klij}, \quad (1.69)$$

que está basada en la idea de energía de deformación, reduce el número de componentes independientes, que caracterizan a un sólido elástico en general, en 21.

En una escala mayor, el material dentro la tierra tiene aproximadamente las mismas propiedades físicas sin importar la orientación, condición conocida como *isotropía*. Para un material isotrópico, c_{ijkl} tiene aún más simetrías, se tienen solamente dos módulos elásticos independientes, que pueden estar definidos de varias maneras. Una forma útil son las *constantes de Lamé* λ y μ , que están definidos tal que

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (1.70)$$

En términos de las constantes de Lamé, la ecuación constitutiva (1.65) para un material isotrópico se puede escribir como

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (1.71)$$

donde θ es la dilatación. Por ejemplo, $\sigma_{11} = \lambda \theta + 2\mu e_{11}$ y $\sigma_{12} = 2\mu e_{12}$. Se usará esta relación constitutiva para estudiar las ondas sísmicas y sus velocidades dependerán del módulo elástico. Desviaciones de la isotropía ocurren en muchas partes de la tierra, notoriamente en litósfera oceánica y en la base del manto.

A pesar de que los componentes de c_{ijkl} describen completamente el comportamiento del material elástico, son difíciles de interpretar. Esto también es cierto para la constante de Lamé λ . Por el contrario, μ , llamado *rigidez* o *módulo de corte*, tiene una simple interpretación física. Considere la respuesta de un cuerpo elástico isotrópico al aplicarle un esfuerzo de corte σ_{12} . En este caso, el término en la ecuación constitutiva (1.71) tiene dilatación igual a cero, de modo que sólo se tiene deformación de corte igual a $e_{12} = \sigma_{12}/2\mu$. La respuesta a esfuerzos de corte están descritos por la rigidez. μ no puede ser negativa, en el sentido del que la deformación sea consistente con el esfuerzo aplicado. Un material con μ grande es muy rígido y responde a un esfuerzo dado con poca deformación. Por el contrario, un esfuerzo de corte produce una deformación muy grande cuando tiene poca rigidez. Un material con $\mu = 0$, no soporta esfuerzos de corte y se conoce como fluido perfecto. En tal fluido, el tensor de esfuerzos es diagonal en cualquier sistema coordenado, y la presión es igual al negativo del esfuerzo medio. A pesar de que fluidos perfectos no existen, el océano puede en general tratarse como si lo fuera para ondas sísmica que inciden en el fondo del mar. Aún más sorprendente es, que para fines sismológicos, el fluido de acero líquido en el núcleo externo de la tierra también puede considerarse como fluido perfecto.

Otras constantes elásticas que pueden ser calculadas en términos de simples experimentos son bastante útiles. El módulo de *incompresibilidad* K , está definido al someter un

cuerpo a presión litostática dP tal que

$$d\sigma_{ij} = -dP\delta_{ij}. \quad (1.72)$$

Para un cuerpo elástico isotrópico, las deformaciones resultantes, son

$$-dP\delta_{ij} = \lambda d\theta\delta_{ij} + 2\mu de_{ij}. \quad (1.73)$$

Sumando se tiene

$$-3dP = 3\lambda d\theta + 2\mu d\theta, \quad (1.74)$$

El módulo de incompresibilidad es entonces la razón entre la presión aplicada y el cambio de volumen resultante

$$K = \frac{-dP}{d\theta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (1.75)$$

El término de incompresibilidad es adecuado porque mayor es el valor de K , menor es el cambio de volumen producido por una presión dada. K es mayor que cero, porque de otra forma objetos se expandirían al comprimirse.

Se puede escribir la ecuación constitutiva (1.71) en términos de K y μ ,

$$\sigma_{ij} = K\theta\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \theta\delta_{ij}/3) \quad (1.76)$$

muestra que la respuesta a un esfuerzo aplicado tiene dos partes: un cambio de volumen caracterizado por K y una deformación de corte, o cambio de forma, caracterizado por μ .

Otras dos constantes elásticas son definidas al jalar el material a lo largo de un sólo eje, conduciendo a un estado de esfuerzos llamado *tensión uniaxial*. Si la tensión es aplicada a lo largo del eje x_1 , entonces por la ecuación (1.71) se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)e_{11} + \lambda e_{22} + \lambda e_{33} \\ \sigma_{22} &= \lambda e_{11} + (\lambda + 2\mu)e_{22} + \lambda e_{33} = 0 \\ \sigma_{33} &= \lambda e_{11} + \lambda e_{22} + (\lambda + 2\mu)e_{33} = 0 \end{aligned} \quad (1.77)$$

Sustrayendo las dos últimas ecuaciones se demuestra que

$$e_{22} = e_{33} = \frac{-\lambda}{2(\lambda + \mu)}e_{11} = -\nu e_{11}, \quad (1.78)$$

donde ν , es el coeficiente de Poisson, que da la razón de la contracción a lo largo de dos ejes cuando se ejerce extensión en el eje restante. Sustituyendo en la primera línea de la ec. (1.77) se obtiene

$$\frac{\sigma_{11}}{e_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = E, \quad (1.79)$$

donde E es el *módulo de Young*, la razón entre el esfuerzo de tensión y la deformación de tensión resultante.

1.2. La ecuación de onda sísmica

Las ideas de elasticidad revisadas anteriormente permiten vislumbrar que la ecuación de movimiento tiene soluciones que describen los dos tipos de propagación de ondas elásticas (sísmicas), ondas de *compresión* y de *corte*. Más adelante se mostrará como estos tipos de onda se propagan diferente, con velocidades que dependen de forma distinta a las propiedades elásticas del material.

Considere un región homogénea⁹ dentro de un material elástico. Se asume que la región no contiene una fuente de ondas sísmicas, que requeriría el uso de fuerzas de cuerpo. Una vez que las ondas se propagan lejos de la fuente, la relación entre los esfuerzos y los desplazamientos está dada por la ecuación de movimiento homogéneo, que no incluye el término de fuerza de cuerpo, tal que $\underline{F} = m\underline{a}$ se escribe como

$$\sigma_{ij,j}(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\underline{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.80)$$

Antes de resolver esta ecuación, es importante notar dos cosas. Primero, la ecuación de movimiento puede escribirse y resolverse totalmente en términos de los desplazamientos, porque el esfuerzo está relacionado con la deformación, el cual está formado por derivadas del desplazamiento. Los esfuerzos y las deformaciones están relacionados por la ecuación constitutiva, que caracteriza al material. Por lo tanto, a pesar de que la ecuación de movimiento no depende de las constantes elásticas, su solución sí. Segundo, la ecuación de movimiento relaciona las derivadas espaciales del tensor de esfuerzos a una derivada temporal del vector de desplazamiento. La solución es el vector de desplazamiento y por lo tanto se pueden obtener los tensores de deformaciones y esfuerzos como funciones del espacio y del tiempo. Usualmente, por simplicidad, estas dependencias no se escriben de forma explícita.

Se resuelve la ec. (1.80) en coordenadas Cartesianas (x, y, z) , empezando por el componente x ,

$$\frac{\partial \sigma_{xx}(\underline{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(\underline{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}(\underline{x}, t)}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x(\underline{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.81)$$

Para expresar la ecuación anterior en términos de desplazamientos, se usa la ecuación constitutiva para un medio elástico isotrópico (1.71),

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (1.82)$$

para escribir las deformaciones en términos del desplazamiento

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \theta + 2\mu e_{xx} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu e_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_{xz} &= 2\mu e_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.83)$$

⁹Un medio homogéneo tiene propiedades que no varían de posición

Tomando las derivadas de los componentes de esfuerzos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right),\end{aligned}\quad (1.84)$$

usando el hecho de que en un material homogéneo sus constantes elásticas no cambian con la posición. Finalmente, sustituyendo las derivadas en la ecuación de movimiento y usando la definición de de la dilatación

$$\theta = \nabla \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1.85)$$

y del Laplaciano

$$\nabla^2(u_x) = \nabla \cdot \nabla u_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \quad (1.86)$$

se obtiene

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2(u_x) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (1.87)$$

para el componente x de la ecuación de movimiento (1.80).

Ecuaciones similares se obtienen para los componentes y y z del desplazamiento. Las tres ecuaciones pueden ser combinadas, usando el vector Laplaciano del campo de desplazamiento

$$\nabla^2 \underline{u} = (\nabla^2 u_x, \nabla^2 u_y, \nabla^2 u_z), \quad (1.88)$$

en una sola ecuación vectorial

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \underline{u}(\underline{x}, t)) + \mu \nabla^2 \underline{u}(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.89)$$

Esta ecuación de movimiento es conocida como la ecuación de onda, para un medio elástico isotrópico, escrita en función de los desplazamientos que varían en el tiempo y el espacio.

1.2.1. Teorema de Helmholtz

El desplazamiento en la ecuación de onda se descompondrá en términos de potenciales para identificar el tipo de ondas que viajan en un medio elástico.

El Laplaciano puede reescribirse como

$$\nabla^2 \underline{u} = \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) \quad (1.90)$$

para obtener

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \underline{u}(\underline{x}, t)) - \mu \nabla \times (\nabla \times \underline{u}(\underline{x}, t)) = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.91)$$

En lugar de resolver la ec. (1.91) directamente, se expresa el campo de desplazamiento en términos de otras dos funciones, ϕ y $\underline{\Upsilon}$, llamadas potenciales;

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \nabla\phi(\underline{x}, t) + \nabla \times \underline{\Upsilon}(\underline{x}, t). \quad (1.92)$$

En esta representación, el desplazamiento es la suma del gradiente de un potencial escalar, $\phi(\underline{x}, t)$, y el rotacional¹⁰ de un potencial vectorial, $\underline{\Upsilon}(\underline{x}, t)$, ambos son función del espacio y del tiempo. A pesar de que esta descomposición aparenta introducir complejidad, de hecho clarifica el problema, porque las identidades vectoriales,

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \quad \nabla \cdot (\nabla \times \underline{\Upsilon}) = 0, \quad (1.93)$$

separan el campo de desplazamientos en dos partes. La parte asociada con el potencial escalar no induce rotación y da lugar a ondas de compresión. Por otro lado, la parte asociada con el potencial vectorial tiene divergencia cero, $\nabla \cdot \underline{\Upsilon} = 0$ no produce cambio de volumen, y corresponde a ondas de corte. Esta descomposición en potenciales escalares y vectoriales, es llamada *Descomposición de Helmholtz*, puede hacerse para cualquier campo vectorial.

1.2.2. Ecuación de onda en términos de potenciales

Sustituyendo los potenciales (1.92) en la ecuación de onda (1.91) y reacomodando sus términos

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2\phi) - \mu\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \underline{\Upsilon}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\phi + \nabla \times \underline{\Upsilon}). \quad (1.94)$$

Usando la ec. (1.90), el segundo término de la ec. (1.94) se simplifica

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times (\nabla \times \underline{\Upsilon}) &= -\nabla^2(\nabla \times \underline{\Upsilon}) + \nabla(\nabla \cdot (\nabla \times \underline{\Upsilon})) \\ &= -\nabla^2(\nabla \times \underline{\Upsilon}), \end{aligned} \quad (1.95)$$

porque la divergencia del rotacional es cero. Después de sustituir este término en la ec. (1.94) y reagrupando términos se tiene

$$\nabla \left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi(\underline{x}, t) - \rho \frac{\partial^2\phi(\underline{x}, t)}{\partial t^2} \right] = -\nabla \times \left[\mu\nabla^2\underline{\Upsilon}(\underline{x}, t) - \rho \frac{\partial^2\underline{\Upsilon}(\underline{x}, t)}{\partial t^2} \right], \quad (1.96)$$

usando que las constantes elásticas no varían con la posición y el orden de diferenciación no tiene efecto.

Una solución de la ecuación puede ser encontrada si ambos términos en los corchetes son cero. En este caso, se tienen dos ecuaciones de onda, una por cada potencial. El potencial escalar satisface

$$\nabla^2\phi(\underline{x}, t) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2\phi(\underline{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.97)$$

¹⁰El **rotacional** es un operador vectorial que describe la rotación infinitesimal de un campo vectorial. En cada punto en el campo, el rotacional es representado por un vector. Los atributos del vector, longitud y dirección, caracterizan la rotación en ese punto.

con la velocidad

$$\alpha = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}. \quad (1.98)$$

Como se verá más adelante su solución corresponde a las ondas P o compresionales. De manera similar, el potencial vectorial satisface

$$\nabla^2 \underline{\Upsilon}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \underline{\Upsilon}(\underline{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.99)$$

con velocidad

$$\beta = (\mu/\rho)^{1/2}, \quad (1.100)$$

que corresponde a las ondas S , o de corte.

Las ecs. (1.97) y (1.99) son únicamente válidas para un medio homogéneo porque para su obtención se asumió que todas las derivadas de las constantes elásticas son cero. A pesar de que estas ecuaciones fueron derivadas en coordenadas Cartesianas, estas son válidas para cualquier sistema coordenado.

1.3. Conceptos básicos para ondas armónicas

La ecuación de onda escalar en una dimensión está dada por

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (1.101)$$

donde v es la velocidad de onda. Esta ecuación puede resolverse fácilmente, porque cualquier función con la forma $u(x, t) = f(x \pm vt)$ es una solución. Para verificar esto, note que las derivadas parciales son

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f''(x \pm vt) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 f''(x \pm vt), \quad (1.102)$$

donde f'' es la segunda derivada de f con respecto a su argumento. Por lo tanto, cualquier función cuyo argumento sea $(x \pm vt)$ es una solución.

Para notar que una función $f(x - vt)$ describe una onda que se propaga, considere como esta varía en tiempo y espacio. Conforme el tiempo avanza por un incremento dt , el argumento permanece constante cuando la distancia se incrementa vdt . Como el valor de la función permanece igual cuando su argumento es constante, $f(x - vt)$ describe una onda de forma constante que se propaga con velocidad v en la dirección positiva de x (Fig. 13). De manera similar, como $(x + vt)$ es constante si x decrementa cuando el tiempo incrementa, $f(x + vt)$ describe una onda que se propaga con velocidad v en la dirección $-x$. El signo que relaciona a x con t muestra el sentido en que viaja la onda.

1.3.1. Solución de onda armónica

Cualquier función de la forma $f(x \pm vt)$ describe una onda que se propaga como una función del tiempo y la distancia. Una forma particular es como una onda *armónica* o sinusoidal

$$u(x, t) = Ae^{i(\omega t \pm kx)} = A \cos(\omega t \pm kx) + Ai \sin(\omega t \pm kx). \quad (1.103)$$

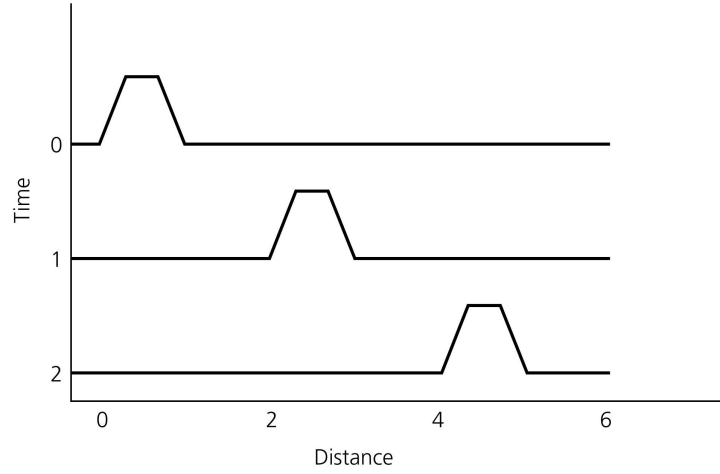


Figura 13: Instantáneas de una onda $f(x - 2t)$ que viaja en la dirección $+x$. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

Una onda armónica se caracteriza por su amplitud A y dos parámetros, ω y k . Sustituyendo la onda armónica (1.103) en la ecuación de onda (1.101) se puede despejar la velocidad de onda para obtener

$$v = \omega/k. \quad (1.104)$$

A pesar de que la función exponencial $u(x, t)$ en la ec. (1.103) es compleja, el desplazamiento físico debe ser real. Entonces se describe al desplazamiento como la parte real de $u(x, t)$.

Para entender la solución de onda armónica, considere la onda dada por la parte real de $u(x, t)$, que es $A \cos(\omega t - kx)$. La Fig. 14 muestra como la función varía tanto en tiempo como en espacio. El valor de u es constante cuando la *fase*¹¹ ($\omega t - kx$) permanece constante, como la cresta¹² o valle¹³. Tales líneas de fase constante requieren que x incremente cuando t incremente. Estas líneas indican ondas que se propagan en la dirección $+x$ a una velocidad dada por dx/dt , la pendiente de la línea en el plano $x - t$. Mayor entendimiento viene al examinar $u(x, t)$ en un punto del espacio x_0 . En términos de la Fig. 14, es una rebanada de la función en un plano paralelo al eje del tiempo, que intersecta la eje de la distancia en x_0 . Se obtiene una función periódica del tiempo, $u(x_0, t) = A \cos(\omega t - kx_0)$ (Fig. 15, arriba). Como la función regresa el mismo valor cuando ωt cambia por 2π , la oscilación es caracterizada por el *periodo*, $T = 2\pi/\omega$, el tiempo en el que se repite. La periodicidad puede también describirse por la *frecuencia*, $f = 1/T = \omega/(2\pi)$, el número de oscilaciones dentro de una unidad de tiempo, o por la *frecuencia angular*, $\omega = 2\pi f$. El periodo tiene unidades de tiempo, de modo que la frecuencia y la frecuencia angular tienen unidades de tiempo⁻¹. En la

¹¹La *fase* indica la situación instantánea en el ciclo, de una magnitud que varía ciclicamente, siendo la fracción del periodo transcurrido desde el instante correspondiente al estado tomado como referencia.

¹²*Cresta*: La cresta es el punto de máxima elongación o máxima amplitud de la onda

¹³*Valle*: Es el punto más bajo de una onda.

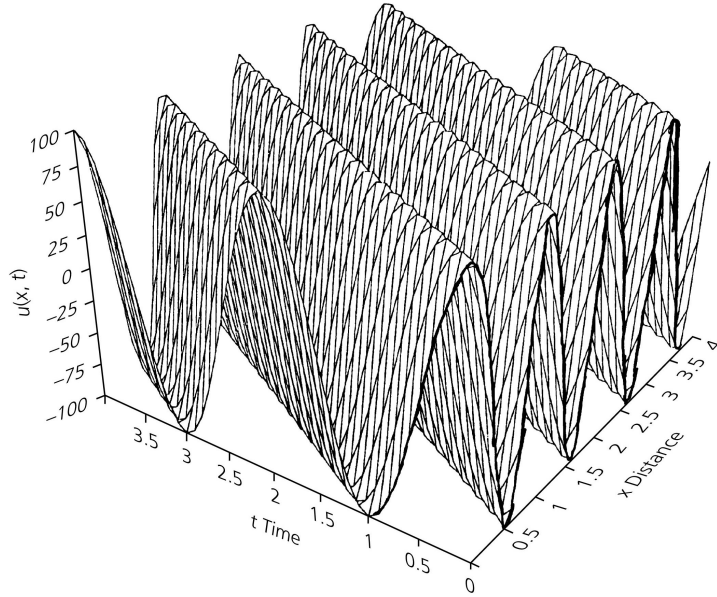


Figura 14: Desplazamiento como una función del espacio y el tiempo para la onda armónica $u(x, t) = A \cos(\pi t - 2\pi x)$ que se propaga en la dirección $+x$. Una línea que sigue una cresta (o cualquier otra parte de la onda) en espacio y tiempo representa la velocidad de onda. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

Fig. 14, $u(x, t) = A \cos(\pi t - 2\pi x)$, la frecuencia angular es π (unidades de tiempo) $^{-1}$, la frecuencia es $1/2$ (unidades de tiempo) $^{-1}$, y el periodo es 2 unidades de tiempo. Por lo tanto el intervalo que se muestra, 4 unidades de tiempo, incluye dos ciclos completos de oscilación.

De manera alternativa, se examina $u(x, t)$ en el tiempo fijo, t_0 , y se grafica $u(x, t_0) = A \cos(\omega t_0 - kx)$ como una función de la posición (Fig.15, abajo). En términos de la Fig. 14, esto es una rebanada de la función en el plano paralelo del eje de la distancia, que intersecta al eje del tiempo en t_0 . Este desplazamiento es periódico en espacio sobre una distancia igual a la *longitud de onda*, $\lambda = 2\pi/k$, la distancia entre dos puntos correspondientes en un ciclo. La forma en que la oscilación se repite en espacio puede también describirse por k , el *número de onda* o *frecuencia espacial*, que es 2π veces el número de ciclos que ocurren en una unidad de distancia. La longitud de onda tiene unidades de distancia, de modo que el número de onda tiene unidades de distancia $^{-1}$. En la Fig. 14 la longitud de onda es 1 unidad de distancia, cuatro ciclos ocurren en el intervalo de cuatro unidades de distancia, y el número de onda es 2π (unidades de distancia) $^{-1}$. Note que la longitud de onda y el número de onda son análogos, para un tiempo constante, al periodo y la frecuencia angular para una distancia constante. La Tabla 1.3.1 resume las relaciones entre los diferentes parámetros de onda. Todas estas relaciones pueden derivarse de $v = \omega/k$ y las definiciones de las otras cantidades. A

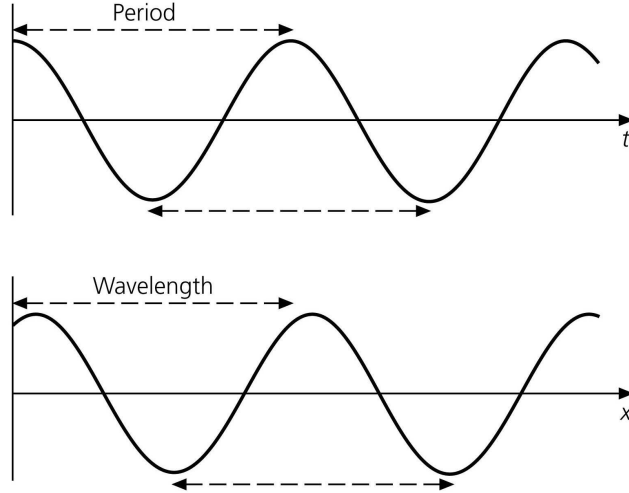


Figura 15: Una onda armónica $u(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ en una posición fija del espacio como función del tiempo (arriba) y como en un tiempo dado como función de la posición (abajo). Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

Cantidad	Unidades	
Velocidad	distancia/tiempo	$v = \omega/k = f\lambda = \lambda/T$
Periodo	tiempo	$T = 2\pi/\omega = 1/f = \lambda/v$
Frecuencia angular	tiempo^{-1}	$\omega = 2\pi/T = 2\pi f = kv$
Frecuencia	tiempo^{-1}	$f = \omega/(2\pi) = 1/T = v/\lambda$
Longitud de onda	distancia	$\lambda = 2\pi/k = v/f = vT$
Número de onda	distancia^{-1}	$k = 2\pi/\lambda = \omega/v = 2\pi f/v$

Cuadro 1: Relación entre los parámetros de onda

pesar de que las diferentes relaciones pueden parecer confusas, estas son fáciles de recordar usando las dimensiones de las cantidades. Por ejemplo, la velocidad debe ser la razón entre la longitud de onda y el periodo, no su producto.

La solución de onda armónica describe una onda sinusoidal de una frecuencia particular. Esto puede parecer una solución específica, no aplicable a propagación de ondas más complejas. En particular, la onda sinusoidal está definida para todo tiempo y distancia, mientras que en situaciones físicas se tratan con ondas que existen en intervalos limitados de espacio y tiempo. Afortunadamente, una onda de forma arbitraria puede descomponerse en un conjunto de ondas armónicas usando análisis de Fourier. Como resultado, las soluciones que describen el simple caso de ondas armónicas puede ser aplicado a casos más complicados.

1.3.2. Extensión a tres dimensiones

La ecuación de onda escalar en tres dimensiones,

$$\nabla^2 \phi(\underline{x}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi(\underline{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.105)$$

describe como el campo escalar $\phi(\underline{x}, t)$ se propaga en tres dimensiones. Por analogía a la ecuación de movimiento (1.51), la ec. (1.105) es una ecuación de onda homogénea, sin funciones de fuerza de cuerpo que actúen como fuente de ondas. Si hubiera fuerzas de cuerpo, se tendría la ecuación de onda escalar inhomogénea con el término fuente $f(\underline{x}, t)$,

$$\nabla^2 \phi(\underline{x}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi(\underline{x}, t)}{\partial t^2} = f(\underline{x}, t). \quad (1.106)$$

La solución de onda armónica a la ecuación de onda escalar en una dimensión (ec. (1.103)) puede generalizarse para resolver la ecuación de onda escalar tridimensional. Esta solución, llamada *onda armónica plana* es

$$\begin{aligned} \phi(\underline{x}, t) &= A \exp(i(\omega t \pm \underline{k} \cdot \underline{x})) \\ &= A \exp(i(\omega t \pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z)), \end{aligned} \quad (1.107)$$

donde $\underline{x}$ es el vector posición y $\underline{k} = (k_x, k_y, k_z)$ es el *vector de onda*, algunas veces llamado *vector número de onda*. Esta solución describe una onda plana que se propaga en una dirección arbitraria dada por el vector de onda, en contraste con la solución unidimensional que se propaga a lo largo del eje coordenado. Para demostrar esto, se escribe $\underline{k} = |\underline{k}| \hat{\underline{k}}$, donde $\hat{\underline{k}}$ es un vector unitario en la dirección $\underline{k}$; tal que la ec. (1.107) se puede escribir como

$$\phi(\underline{x}, t) = A \exp(i[\omega t - |\underline{k}|(\hat{\underline{k}} \cdot \underline{x})]), \quad (1.108)$$

una onda plana que se propaga en la dirección $\hat{\underline{k}}$ con velocidad

$$v = \omega/|\underline{k}|. \quad (1.109)$$

Por lo tanto el vector de onda describe dos características importantes de una onda que se propaga. Su magnitud da el número de onda, la frecuencia espacial, y su dirección da la dirección de propagación. Los *frente de onda*, son superficies de fase constante ($\omega t - \underline{k} \cdot \underline{x}$) en cualquier instante de tiempo y por lo tanto valores constantes de $\phi(\underline{x}, t)$; son planos perpendiculares a la dirección de propagación (Fig. 16). Para observar esto, note que todos los puntos en un plano perpendicular al vector de onda tienen el mismo valor de $\underline{k} \cdot \underline{x}$, porque este producto escalar es la proyección de $\underline{k}$ en $\underline{x}$. La fase es periódica sobre una distancia a lo largo de la dirección de propagación igual a la longitud de onda, $2\pi/|\underline{k}|$.

La solución de la ecuación escalar tridimensional puede ser generalizada para resolver la ecuación de onda vectorial en tres dimensiones,

$$\nabla^2 \underline{\Upsilon}(\underline{x}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \underline{\Upsilon}(\underline{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.110)$$

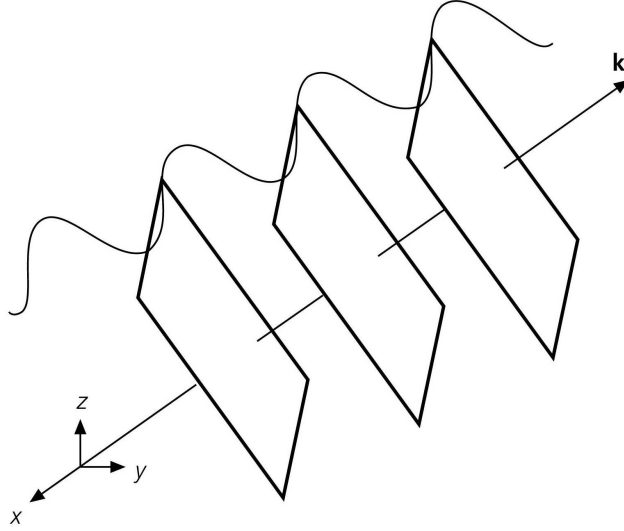


Figura 16: Frentes de onda de una onda plana armónica que viaja en la dirección indicada por el vector de onda $\underline{k}$. La longitud de onda es $\lambda = 2\pi/|\underline{k}|$. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

que describe la propagación de un campo vectorial. En coordenadas Cartesianas se puede descomponer en tres ecuaciones de onda escalares

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Upsilon_x(\underline{x}, t) &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Upsilon_x(\underline{x}, t)}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \Upsilon_y(\underline{x}, t) &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Upsilon_y(\underline{x}, t)}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \Upsilon_z(\underline{x}, t) &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Upsilon_z(\underline{x}, t)}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (1.111)$$

La solución de onda armónica plana a la ecuación de onda vectorial es entonces

$$\underline{\Upsilon}(\underline{x}, t) = \underline{A} \exp(i(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{x})), \quad (1.112)$$

que es como la ec. (1.107) excepto que tanto $\underline{\Upsilon}(\underline{x}, t)$ como las constantes $\underline{A}$ son vectores.

1.3.2.1. Ondas esféricas Una segunda solución a la ecuación escalar tridimensional conduce a ondas con frentes de onda esféricos en lugar de planos. Para obtener esta solución, se expresa al potencial escalar, $\phi(\underline{r}, t)$, y su Laplaciano en coordenadas esféricas. Se consideran soluciones con simetría esférica donde ϕ es una función sólo del tiempo y del radio r , de modo que el término $\partial\phi/\partial r$ es el único diferente de cero del Laplaciano. La ondas esféricas simétricas satisfacen la ecuación de onda homogénea

$$\nabla^2 \phi(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi(r, t)}{\partial t^2}, \quad (1.113)$$

donde la variable espacial es el radio r en lugar del vector de posición $\underline{r}$. Para resolver esta ecuación, se sustituye

$$\phi(r, t) = \xi(r, t)/r, \quad (1.114)$$

para obtener

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (1.115)$$

Como el término en corchetes es la ecuación escalar en una dimension, cualquier función de la forma $\xi = f(r \pm vt)$ satisface la ec. (1.115) cuando $r \neq 0$. Por lo que cualquier función de la forma

$$\phi(r, t) = f(t \pm r/v)/r, \quad (1.116)$$

es una solución esférica simétrica de la ecuación de onda escalar.

Esta solución describe frentes de onda esféricos centrados en el origen $\underline{r} = 0$, cuyas amplitudes dependen de la distancia del origen. Cuando el signo de menos es usado, la ec. (1.116) representa ondas salientes que divergen de la fuente en el origen con un decaimiento de amplitud de $1/r$. El signo más conduce a ondas esféricas que colapsan en el origen con un crecimiento de amplitud de $1/r$. Resulta común imponer una *condición de radiación* pidiendo que las ondas que vienen de lejos no entren en la región de estudio para así descartar la solución de ondas entrantes.

Sin embargo, la ec. (1.116) no es solución a la ecuación homogénea en todo el espacio porque es infinita en $\underline{r} = 0$. Físicamente esto es porque una onda que se propaga a partir de un punto debió haberse generado por una fuente colocada ahí. Por lo tanto la onda saliente, $\phi(r, t) = f(t - r/v)/r$, es de hecho solución de la ecuación de onda inhomogénea

$$\nabla^2 \phi(r, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi(r, t)}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\underline{r}) f(t). \quad (1.117)$$

Esto representa una fuente puntual en el origen con una función tiempo $f(t)$. La función delta $\delta(\underline{r})$ es cero excepto en $\underline{r} = 0$, pero su integral sobre un volumen incluyendo el origen es 1. Por lo tanto, integrando sobre un volumen que incluye al origen, se muestra que la ec. (1.116) es una solución de la ecuación escalar inhomogénea (1.117) aún en el origen. De modo que, buscando una solución a la ecuación homogénea que tuviera ondas esféricas, se encontró una solución a la ecuación inhomogénea que es usada para estudiar las ondas radiadas por fuentes sísmicas.

El hecho de que la solución de onda esférica (1.116) representa una onda saliente generado en el origen explica el factor dependiente de la distancia $1/r$, que no tiene contraparte con la solución de onda plana. Una onda esférica que se propaga lejos de la fuente incrementa el área de su frente de onda por $4\pi r^2$. Como la energía por unidad de área del frente de onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, la energía por unidad de área decae $1/r^2$. Este decaimiento, llamado *dispersión geométrica*, conserva la energía.

Una onda plana puede observarse como el límite de una onda esférica lejos de la fuente, porque el frente de la onda esférica se vuelve casi plano (Fig. (17)). Esta aproximación es comúnmente usada por los sismólogos cuando los sismómetros se encuentran lejos del terremoto.

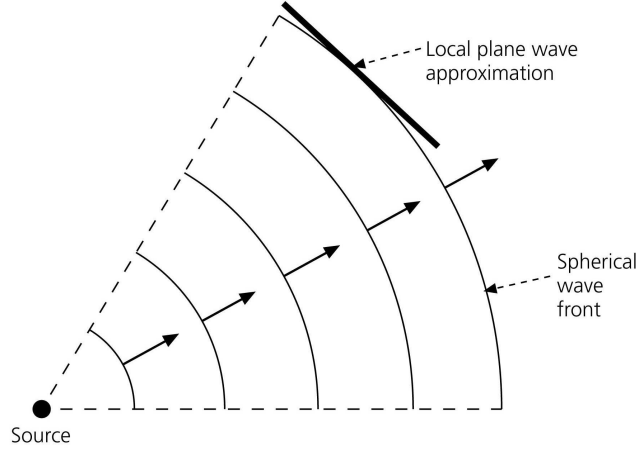


Figura 17: Aproximación del frente de onda esférico con un frente de onda plano. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

1.4. Ondas P y S

A través de la descomposición de Helmholtz (1.92), el desplazamiento puede separarse en un potencial escalar que corresponde a ondas P que satisfacen la ecuación de onda escalar

$$\nabla^2 \phi(\underline{x}, t) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi(\underline{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.118)$$

y un potencial vectorial que corresponde a las ondas S que satisfacen la ecuación de onda vectorial

$$\nabla^2 \underline{\Upsilon}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \underline{\Upsilon}(\underline{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.119)$$

Para analizar los desplazamientos inducidos por los dos tipos de ondas, considere una onda plana que se propaga en la dirección z . El potencial escalar para una onda armónica plana P que satisface la ec. (1.118) es

$$\phi(z, t) = A \exp(i(\omega t - kz)), \quad (1.120)$$

tal que el desplazamiento que produce es el gradiente

$$\underline{u}(z, t) = \nabla \phi(z, t) = (0, 0, -ik) A \exp(i(\omega t - kz)), \quad (1.121)$$

que tiene un sólo componente diferente de cero a lo largo de la dirección de propagación z (Fig. 18). La dilatación correspondiente es diferente de cero

$$\nabla \cdot \underline{u}(z, t) = -k^2 A \exp(i(\omega t - kz)), \quad (1.122)$$

de modo que ocurre un cambio de volumen. Conforme la onda se propaga, los desplazamientos en la dirección de propagación provocan que el material se comprima

y expanda alternadamente. Por lo tanto, la onda P generada por un campo escalar es llamada onda de compresión.

Por el contrario, para la onda S u onda de corte, descrita por el potencial vectorial

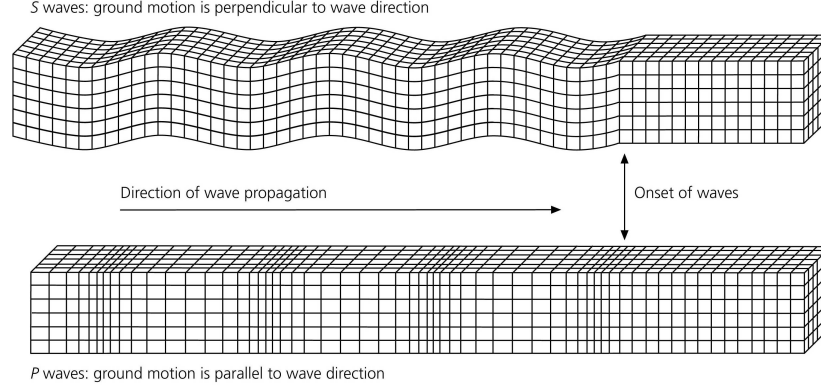


Figura 18: Desplazamiento de las ondas P y S . Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

$$\underline{\Upsilon}(z, t) = (A_x, A_y, A_z) \exp(i(\omega t - kz)), \quad (1.123)$$

genera un campo de desplazamiento dado por su rotacional

$$\underline{u}(z, t) = \nabla \times \underline{\Upsilon}(z, t) = (ikA_y, -ikA_x, 0) \exp(i(\omega t - kz)), \quad (1.124)$$

cuyo componente a lo largo de la dirección de propagación z es cero (Fig. 18). Por lo tanto el desplazamiento asociado con una onda de corte es perpendicular a la dirección de propagación. Una onda de corte no produce cambio de volumen porque la dilatación, $\nabla \cdot \underline{u}(z, t)$, es cero.

La comparación de los desplazamientos para las ondas P y S ilustra que una onda es caracterizada por dos direcciones. Una es la dirección en que la onda se propaga; la otra es la dirección en la cual el campo que se propaga cambia. Una onda compresional es un ejemplo de una onda *longitudinal*, porque el campo de desplazamiento que se propaga cambia en la dirección de propagación. Un ejemplo familiar es una onda de sonido en el aire, que puede ser descrita como una onda (elástica) compresional en un fluido ideal. Por el contrario, una onda de corte es un ejemplo de una onda *transversal*, porque el campo de desplazamiento que se propaga varía en ángulos rectos a la dirección de propagación. Un ejemplo de ondas transversales son las ondas electromagnéticas.

El componente de $\underline{\Upsilon}(z, t)$ en la dirección de propagación (A_z) no tiene efecto en el campo de desplazamiento porque al aplicar el rotacional se descarta. Por lo tanto, hacer A_z igual a cero para satisfacer el requerimiento de que $\nabla \cdot \underline{\Upsilon} = 0$, no impone ninguna restricción adicional al desplazamiento. Solo A_x y A_y contribuyen al desplazamiento. Como cada componente del desplazamiento depende de solamente uno de

esos términos, pueden haber dos campos de onda de corte independientes. Por ejemplo, si A_x o A_y es cero, entonces sólo estará el componente y o x del desplazamiento. Por lo tanto ondas de corte pueden tener dos polarizaciones independientes, como el caso de otras ondas transversales como la luz. En aplicaciones reales, comúnmente se

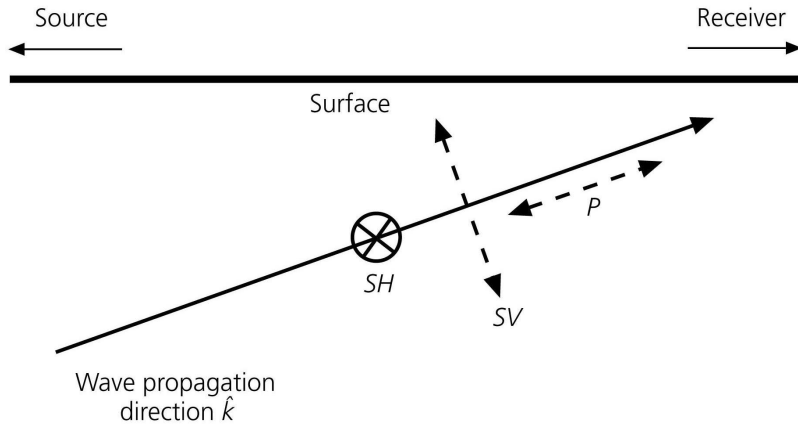


Figura 19: Desplazamiento de las ondas P , SV y SH . Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

define al eje z en la dirección vertical y se orienta el plano $x - z$ según el gran círculo que conecta a la fuente sísmica y el registro. Ondas planas que viajan en la trayectoria directa entre la fuente y el registro se propagan en el plano $x - z$. Las direcciones de polarización de las ondas de corte están definidas como SV , para ondas de corte cuyo desplazamiento se encuentra en el plano $(x - z)$, y SH , para ondas de corte polarizadas horizontalmente con desplazamientos en la dirección y , paralela a la superficie (Fig. 19). A pesar de haber podido elegir cualesquiera dos polarizaciones ortogonales en el plano de los desplazamientos de las ondas de corte, usando SV y SH resulta particularmente conveniente. Se verá más adelante que las ondas P y SV están acopladas entre sí cuando interactúan con fronteras horizontales, mientras que las ondas SH permanece separadas.

2. Soluciones de las Ecuaciones de Movimiento en un Sólido Elástico con una o varias Interfaces Planas (Ondas P , SH y SV)

Objetivo: El estudiante comprenderá los conceptos de las ondas elásticas y analizará su propagación en diferentes medios.

2.1. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera en la superficie de la Tierra son derivadas, para propósitos de Sismología, despreciando a la atmósfera y tratando a la superficie como una frontera entre un sólido y el vacío. En esta aproximación, la superficie de la Tierra es una *superficie libre*, no sujeta a ninguna fuerza. En la superficie libre, con normal $\hat{n}$, el vector de tracción es cero, siendo una restricción a aquellos componentes del tensor de esfuerzo que actúan en la tracción

$$T_i = \sigma_{ij}n_j = 0. \quad (2.1)$$

Por lo tanto, en un sistema coordenado en el cual la superficie sea horizontal, el vector normal es $n_i = \delta_{i3}$, y $T_i = \sigma_{i3}n_3$, por lo que

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0. \quad (2.2)$$

Los componentes del tensor de esfuerzos que no están involucrados en la tracción, en este caso σ_{11} , σ_{12} y σ_{22} , permanece libres de restricciones. De manera similar, no se imponen restricciones a los desplazamientos.

Existen también interfaces entre dos sólidos, un sólido y un líquido, y entre dos líqui-

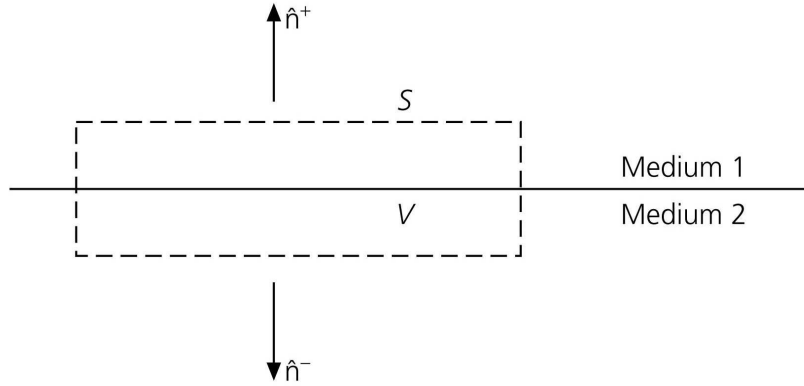


Figura 20: Volumen alrededor de la frontera. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

dos. Sus condiciones de frontera se obtienen al considerar un volumen a lo largo de la interfaz entre materiales diferentes (Fig. 20). El eje mayor del volumen es a lo largo de la interfaz, tal que el área de la superficie, S , es grande en comparación con el volumen, V . Se integra la ecuación de movimiento homogénea (1.51) sobre el volumen

$$\int \left(\sigma_{ij,j}(\underline{x}, t) - \rho \frac{\partial^2 u_i(\underline{x}, t)}{\partial t^2} \right) dV = 0, \quad (2.3)$$

y se utiliza el teorema de divergencia para transformar el primer término de la integral en una integral de superficie como

$$\int \sigma_{ij}(\underline{x}, t) n_j dS - \int \rho \frac{\partial^2 u_i(\underline{x}, t)}{\partial t^2} dV = 0, \quad (2.4)$$

Interfaz	Condiciones de frontera
sólido-sólido	$T_i^+ = T_i^-$ $u_i^+ = u_i^-$
sólido-líquido	$T_3^+ = T_3^-$ $T_2 = T_1 = 0$ $u_3^+ = u_3^-$
superficie libre	$T_i = 0$

Cuadro 2: Condiciones de frontera

donde n_j es el j -ésimo componente del vector normal unitario exterior en cada punto de S . En el límite en el que su espesor se aproxima a cero, la integral de volumen se vuelve despreciable, de modo que

$$\int \sigma_{ij}(\underline{x}, t) n_j dS = 0. \quad (2.5)$$

Como el espesor tiende a cero para que la integral sea cero, la contribución de la parte superior (+) e inferior (−) de la superficie debe satisfacer

$$(\sigma_{ij} n_j)^+ + (\sigma_{ij} n_j)^- = 0. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, como la normal unitaria en la parte superior es el opuesto de aquel en la parte inferior ($n_j^+ = -n_j^-$), los tres componentes del vector de tracción deben ser continuos a través de la superficie.

La continuidad de la tracción conduce a condiciones en componentes específicos de los esfuerzos, dependiendo de la orientación de la interfaz. Por ejemplo, si la interfaz es horizontal, entonces $n_j = \delta_{j3}$, tal que

$$T_i = \sigma_{ij} \delta_{j3} = \sigma_{i3} \quad (2.7)$$

debe ser continuo. Si, por el contrario, la frontera entre dos sólidos es vertical, entonces $n_j = \delta_{j1}$, tal que

$$T_i = \sigma_{ij} \delta_{j1} = \sigma_{i1} \quad (2.8)$$

sería continuo. Como las condiciones de continuidad son para las tracciones en lugar de los esfuerzos, los componentes de los esfuerzos que no están involucrados en la tracción no tienen porque ser continuos.

En la interfaz entre dos sólidos, algunas veces llamada superficie “soldada”, todos los componentes del desplazamiento son continuos porque ni traslapes ni rupturas ocurren. En la interfaz entre un sólido y un fluido perfecto, el fluido puede deslizarse a lo largo de la interfaz porque su rigidez es cero, de modo que no soporta esfuerzos de corte. De esta forma los componentes de la tracción tangencial en la interfaz son cero en el fluido y por la condición de continuidad en el sólido también. De modo que, los componentes del desplazamiento tangencial no tienen que ser continuos, aunque los componentes normales de la tracción y del desplazamiento sí lo son.

La Tabla 2.1 resume las condiciones de frontera para una interfaz horizontal entre medios diferentes.

2.2. La aproximación de un medio por capas

En la sección anterior, se revisó que la ecuación de movimiento para un medio elástico homogéneo tiene soluciones en las cuales el desplazamiento se describe con potenciales que satisfacen la ecuación de onda. Ahora se usarán estas soluciones para describir la propagación de ondas sísmicas en la Tierra. Aplicar los resultados que se derivan para un medio homogéneo infinito a un planeta real con una estructura interna complicada puede parecer como una tarea titánica. Sin embargo, muchos problemas significativos pueden ser explorados usando esta aproximación.

Para propósitos sismológicos, se caracteriza la estructura interna de la Tierra sólida

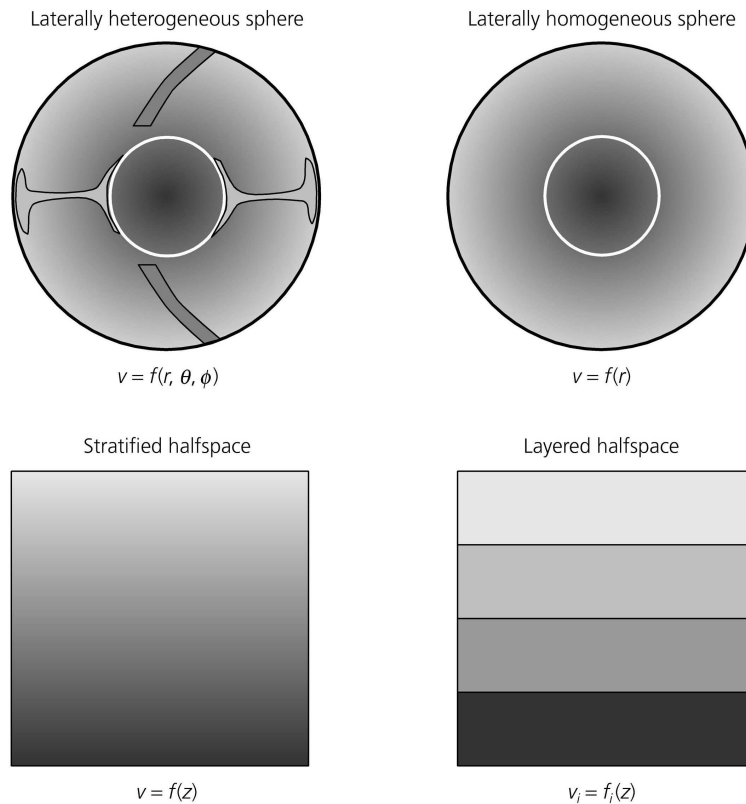


Figura 21: Ilustración esquemática de algunos tipos de modelos de la Tierra usados en sismología. El modelo más preciso, una esfera lateralmente heterogénea, es comúnmente aproximado como una esfera simétrica, con propiedades que varían únicamente con el radio. Un modelo esférico simétrico, puede ser también aproximado para muchos propósitos como un semi-espacio estratificado, en el cual sus propiedades cambian únicamente con la profundidad, o como un semi-espacio compuesto de capas discretas uniformes. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

por la distribución de las propiedades que afectan la propagación de onda sísmica y puede ser estudiada usando ondas sísmicas. De modo que se trabaja con la distribución de propiedades elásticas y densidad. Un modelo sismológico de la estructura elástica de la Tierra es un conjunto de funciones $\alpha(\underline{r})$, $\beta(\underline{r})$, $\rho(\underline{r})$ que muestra como las velocidades y densidad dependen del vector posición $\underline{r}$, y por lo tanto del radio, latitud y longitud. Resultados sismológicos indican que esta distribución es complicada y difícil de caracterizar. Por ejemplo, trozos de litósfera se extienden a profundidades considerables en zonas de subducción (Fig. 21). Como las propiedades físicas de la Tierra sólida varían de manera significativa más con la profundidad que lateralmente, estas pueden ser aproximadas como funciones esféricamente simétricas $\alpha(r)$, $\beta(r)$, $\rho(r)$ que dependen únicamente del radio. Un medio cuyas propiedades varían solo con la profundidad es llamado *lateralmente homogéneo* o *estratificado*, en contraste con un medio *lateralmente heterogéneo* cuyas velocidades varían tanto de manera lateral como con la profundidad.

Cuando la longitud característica de la región en consideración es pequeño en comparación con el radio de la Tierra, como estudios locales de la corteza, la curvatura de la Tierra es despreciada. La Tierra por lo tanto aproximada como un semi-espacio lateralmente homogéneo, con velocidades y densidad caracterizadas por funciones $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\rho(z)$ que varían únicamente con la profundidad z . Una simplificación más es tratar a la Tierra como un semi-espacio que consiste de capas de espesor finito con propiedades uniformes α_i , β_i , ρ_i .

Una característica atractiva del modelo por capas es que las soluciones de la ecuación de movimiento discutidas previamente aplican a medios homogéneos. Cuando un modelo de la Tierra por capas es apropiado, es posible tomar las soluciones de medios homogéneos en cada capa y juntarlas en las interfaces para considerar la propagación de ondas sísmicas entre capas. Esto puede hacerse cuando las ondas planas representan de forma adecuada los frentes de onda, una suposición que se cumple lo suficientemente lejos de la fuente para considerar frentes de onda planos.

La Tierra real no es homogénea lateralmente, mucho menos compuesta por capas uniformes, y los frentes de ondas sísmica no se extienden como planos al infinito. La prueba de si estas aproximaciones son útiles depende de si los resultados derivados al aplicarlas en datos sismológicos conducen a inferencias geológicas válidas. Sorprendentemente este caso es común para fines sismológicos, donde modelos lateralmente homogéneos actúan como representaciones útiles de la estructura promediada de la Tierra.

2.3. Potenciales de ondas planas para un medio por capas

El primer objetivo será analizar que sucede cuando una onda plana P o S incide en la frontera entre dos semi-espacios de materiales homogéneos e isotrópicos con diferentes constantes elásticas y por lo tanto velocidades sísmicas. Se derivará la ley de Snell, la famosa relación que describe la flexión de los frentes de onda cuando una onda plana pasa de un medio a otro. Una vez que se pueda manejar una sola frontera, se generalizará esta solución a una pila de capas homogéneas. La aproximación por capas puede ser usada, aún cuando las propiedades elásticas varían suavemente, utilizando un número de capas delgadas muy grande.

La geometría del problema se muestra en la Fig. 22. Se considera una onda plana

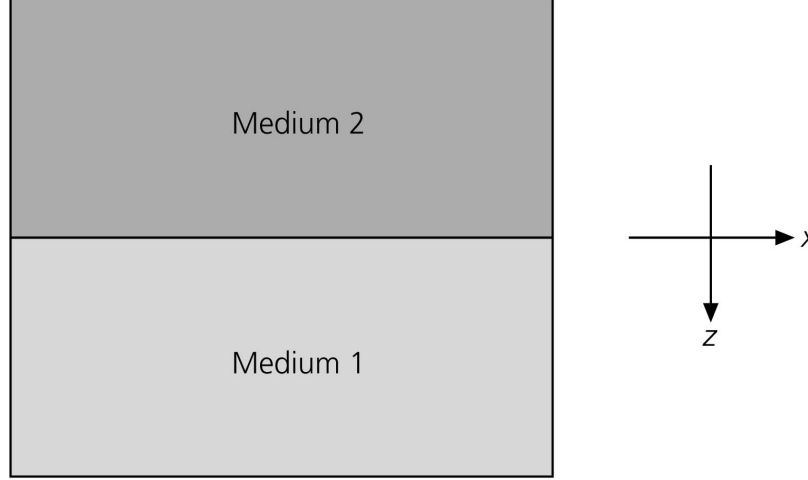


Figura 22: Dos semi-espacios en contacto, compuesto de materiales con diferentes propiedades elásticas. La interfaz horizontal es el plano $x - y$. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

con dirección de propagación, y por lo tanto vector de onda, en el plano $x - z$. Los desplazamientos pueden escribirse usando potenciales que son funciones sólo de x y z . Dos semi-espacios de diferentes materiales están en contacto a lo largo de una frontera que es el plano $x - y$, y el eje z , normal a la interfaz, es positivo en la dirección hacia abajo. Esta geometría tiene la característica de que las ondas de corte pueden ser separadas en dos polarizaciones: ondas SV , cuyos desplazamientos están en el plano $x - z$, y ondas SH , cuyos desplazamientos tienen solamente el componente y . Aún más, el desplazamiento y por lo tanto los potenciales no varían con y , y pueden escribirse como funciones de x , z y t .

En la ec. (1.92) se observó que el campo de desplazamiento puede ser descompuesto en un potencial escalar que describe a las ondas P y un potencial vectorial para las ondas S . Para separar las ondas SV y SH , se separa el potencial vectorial $\underline{\Upsilon}$ en dos términos,

$$\underline{\Upsilon}(x, z, t) = \underline{\Psi}(x, z, t) + \nabla \times \underline{\chi}(x, z, t). \quad (2.9)$$

Ahora, el vector de desplazamiento puede ser escrito usando el potencial escalar, $\phi(x, z, t)$, y los dos potenciales vectoriales:

$$\begin{aligned} \underline{u}(x, z, t) &= \nabla \phi(x, z, t) + \nabla \times \underline{\Upsilon}(x, z, t) \\ &= \nabla \phi(x, z, t) + \nabla \times \underline{\Psi}(x, z, t) + \nabla \times \nabla \times \underline{\chi}(x, z, t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Se eligen los vectores de potenciales como

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}(x, z, t) &= (0, \Psi(x, z, t), 0) \\ \underline{\chi}(x, z, t) &= (0, \chi(x, z, t), 0). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Cada potencial tiene ceros para sus componentes x y z , y sus componentes y son las funciones escalares $\Psi(x, z, t)$ para las ondas SV y $\chi(x, z, t)$ para las ondas SH . Por lo tanto el vector de desplazamientos es descrito por tres funciones escalares, una por cada potencial.

Para encontrar los desplazamientos resultantes, se llevan a cabo las operaciones vectoriales en la ec. (2.10). Como los dos potenciales vectoriales tienen solo el componente y , y ni ϕ , Ψ , o χ dependen de y , las derivadas con respecto a y son cero. Por lo tanto los términos P , SV y SH dan lugar a vectores de desplazamiento con componentes (x, y, z)

$$\begin{aligned} (P) \quad \nabla \phi(x, z, t) &= \left(\frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial x}, 0, \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z} \right) \\ (SV) \quad \nabla \times \underline{\Psi}(x, z, t) &= \left(-\frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial z}, 0, \frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial x} \right) \\ (SH) \quad \nabla \times \nabla \times \underline{\chi}(x, z, t) &= \left(0, -\left[\frac{\partial^2 \chi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi(x, z, t)}{\partial z^2} \right], 0 \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por lo tanto, P y SV contribuyen a los componentes x y z del desplazamiento, mientras que SH contribuye sólo al componente y . Las divergencias $\nabla \cdot \underline{\Psi}$ y $\nabla \cdot \underline{\chi}$ son cero porque sólo sus componentes y son diferentes de cero, y $\partial/\partial y$ de estos componentes es cero. Por lo tanto, como se esperaba, ni SH o SV dan lugar a cambios de volumen.

Los componentes del vector de desplazamiento se pueden encontrar agrupando los componentes de la ec. (2.12)

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) &= \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial z} \\ u_z(x, z, t) &= \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial x} \\ u_y(x, z, t) &= -\left(\frac{\partial^2 \chi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi(x, z, t)}{\partial z^2} \right) = -\nabla^2 \chi(x, z, t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Estas ecuaciones demuestran que las ondas $P - SV$ son independientes de las ondas SH . Los componentes x y z del desplazamiento dependen tanto del potencial de la onda P , ϕ , como del potencial de la onda SV , $\underline{\Psi}$. De modo que para ondas que se propagan en el plano $x - z$, las ondas P y SV forman un sistema acoplado, que da lugar a dos componentes del desplazamiento. Ni el potencial P o SV contribuyen al componente y del desplazamiento. Por lo tanto las ondas SH , que únicamente contribuyen al componente y del desplazamiento, están desacopladas de las ondas P y SV . Este acoplamiento y desacoplamiento persiste cuando estas ondas interactúan con una interfaz horizontal paralela al plano $x - y$. Las condiciones de frontera en la interfaz restringen el desplazamiento y las tracciones. Como la normal a la interfaz tiene sólo componente en z

$$\hat{n} = (0, 0, 1), \quad n_j = \delta_{j3}, \quad (2.14)$$

las tracciones en la interfaz están dadas por

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{i3} = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}). \quad (2.15)$$

El sistema $P - SV$ da lugar a componentes diferentes de cero de los desplazamientos u_x y u_z , y por lo tanto de las tracciones σ_{xz} y σ_{zz} . Para estas ondas, tanto u_y y $\sigma_{yz} = 0$. Por el contrario, las ondas SH contribuyen únicamente al componente y del desplazamiento, y el único componente diferente de cero de la tracción es σ_{yz} . Por lo tanto, en la interfaz, las ondas $P - SV$ no tienen efecto en las ondas SH y viceversa. De modo que no hay acoplamiento entre las ondas $P - SV$ y SH . Sin embargo, las ondas P y SV están acopladas, porque ambas afectan a los mismos componentes del desplazamiento y la tracción. Tal que en las interfaces, ondas P se convierten en ondas SV y viceversa, mientras que ondas SH no se convierten en ondas P u ondas SV .

Cuando se trata a la Tierra como un medio estratificado horizontalmente, se asume que las ondas $P - SV$ y SH que se propagan entre dos puntos cualquiera están desacopladas y pueden tratarse de manera separada. La situación es más complicada cuando existen superficies inclinadas. Las ondas $P - SV$ y SH están acoplados en una interfaz inclinada si su normal no corresponde al plano de propagación. Por lo tanto, para interfaces inclinadas, las ondas estarán acopladas para la mayoría de los pares fuente-receptor.

Como resultado, en la mayoría de las aplicaciones se trata al sistema $P - SV$ de ondas de propagación distinto al SH . En la sección anterior, se observó que las ondas P son descritas por el potencial escalar ϕ que satisface la ecuación de onda escalar (1.118), mientras que las ondas S descritas por el potencial vectorial $\underline{\chi}$ satisfacen la ecuación de onda vectorial (1.119). Para notar que cada uno de los potenciales SV y SH satisfacen la ecuación de onda vectorial de manera separada, se sustituye la ec. (2.9) en esta

$$\nabla^2[\underline{\Psi}(x, z, t) + \nabla \times \underline{\chi}(x, z, t)] = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\underline{\Psi}(x, z, t) + \nabla \times \underline{\chi}(x, z, t)], \quad (2.16)$$

y se reagrupan los términos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{\Psi}(x, z, t) - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}(x, z, t)}{\partial t^2} &= -\nabla^2 [\nabla \times \underline{\chi}(x, z, t)] \\ &+ \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\nabla \times \underline{\chi}(x, z, t)], \end{aligned} \quad (2.17)$$

De modo que los dos potenciales pueden tratarse de manera separada. Por lo tanto el sistema $P - SV$ es descrito por

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(x, z, t) &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \underline{\Psi}(x, z, t) &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}(x, z, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ambas de estas ecuaciones son escalares, porque Ψ es la función escalar del componente y del potencial vectorial SV (ec. (2.11)).

Para las ondas SH se tienen dos opciones. Intercambiar el rotacional y las otras derivadas en el lado en el lado derecho de la ec. (2.17) conduce a una función escalar χ , el componente y del potencial vectorial SH , que satisface una ecuación de onda escalar. De manera alternativa, se puede tomar el rotacional y reconocer que por las ecs. (2.12)

y (2.13)

$$u_y = \nabla \times \nabla \times \underline{\chi}(x, z, t), \quad (2.19)$$

tal que

$$\nabla^2 u_y(x, z, t) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_y(x, z, t)}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

Por lo que el desplazamiento de la onda SH satisface una ecuación de onda escalar, y puede encontrarse sin usar el potencial SH .

2.4. Ángulo de incidencia y velocidad aparente

Considere ondas $P - SV$ que se propagan en el plano $x - z$ que son descritas por ondas armónicas planas que son soluciones de las ecuaciones de onda escalares (2.18)

$$\begin{aligned} (P) \quad \phi(x, z, t) &= A \exp(i(\omega t - k_x x \pm k_{z_\alpha} z)) \\ (SV) \quad \Psi(x, z, t) &= B \exp(i(\omega t - k_x x \pm k_{z_\beta} z)). \end{aligned} \quad (2.21)$$

La dirección de propagación de las ondas es descrita por el vector de onda, el cual es normal a los frentes de onda. Para la propagación en el plano $x - z$, la dirección está dada por k_x y k_z porque k_y es cero. Por lo tanto la ec. (2.21) representa ondas que se propagan en la dirección $+x$ (por el signo negativo en $-k_x x$), y en ambas direcciones $+z$ y $-z$.

Los subíndices en $\underline{k}$ y k_z se necesitan porque la magnitud del vector de onda difiere para las ondas P y SV . Se verá más adelante que en esta geometría k_x es el mismo para las ondas P y SV .

Los componentes de los vectores de onda satisfacen

$$|\underline{k}_\alpha|^2 = k_x^2 + k_{z_\alpha}^2 = \omega^2/\alpha^2 \quad |\underline{k}_\beta|^2 = k_x^2 + k_{z_\beta}^2 = \omega^2/\beta^2. \quad (2.22)$$

La dirección de propagación puede también expresarse por el *ángulo de incidencia* que el vector de onda hace con la vertical (Fig. 23). Como los vectores de onda, y por lo tanto los ángulos de incidencia, difieren de las ondas P y S , se adopta la convención que i se refiere a los ángulos de incidencia de ondas P y j para los ángulos de incidencia de las ondas S . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sin i &= \frac{k_x}{(k_x^2 + k_{z_\alpha}^2)^{1/2}} = k_x/|\underline{k}_\alpha| \\ \sin j &= \frac{k_x}{(k_x^2 + k_{z_\beta}^2)^{1/2}} = k_x/|\underline{k}_\beta|. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se verá más adelante que las ondas planas cambian de dirección cuando ellas cruzan una interfaz con un material que tiene diferentes velocidades sísmicas, de modo que cambia la orientación del vector de onda y el ángulo de incidencia. Por lo tanto, la propagación de una onda plana es caracterizada por los cambios de orientación del vector de onda. Entonces se habla de un *rayo* sísmico que sigue esta *trayectoria de rayo*. Figuras como la Fig. 24 son usualmente dibujadas mostrando únicamente las trayectoria de rayo y omiten los frentes de onda que son normales al rayo.

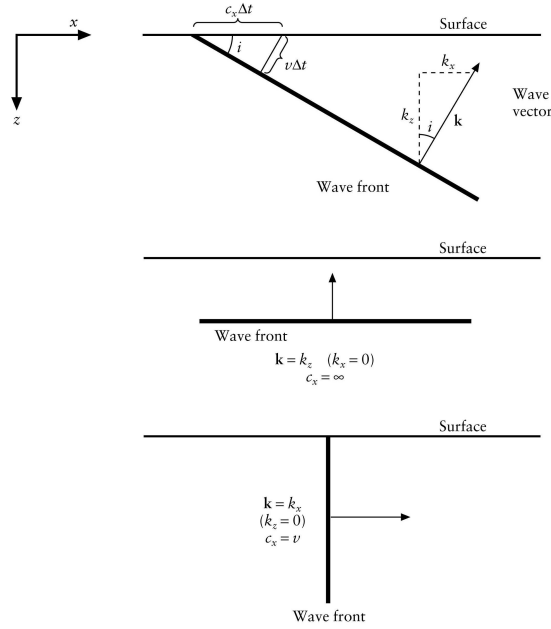


Figura 23: El vector de onda, $\underline{k}$, es normal al frente de onda y apunta en la dirección de propagación. *Arriba*: Para una onda plana que viaja en el plano $x - z$, la dirección de propagación está dada por el vector de onda (k_x, k_z) o el ángulo de incidencia, i , entre el vector de onda y la vertical. En un incremento de tiempo Δt , el frente de onda se mueve una distancia $v\Delta t$, donde v es la velocidad de medio, y recorre una distancia a lo largo de la superficie de $c_x\Delta t$, donde c_x es la velocidad aparente a lo largo de la superficie. *En medio*: Para una onda plana que viaja verticalmente, el ángulo de incidencia es $i = 0$ deg, $\underline{k}$ es igual a k_z y c_x es infinita. *Abajo*: Para una onda plana que se propaga horizontalmente $i = 90$ deg, $\underline{k}$ es igual a k_x y c_x es igual a la velocidad del medio. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

Es útil definir la *velocidad aparente*, c_x , la velocidad en la que una onda plana aparenta viajar a lo largo de una superficie horizontal. La Fig. 23 muestra que en un tiempo Δt una onda plana con un ángulo de incidencia i en un medio con velocidad v se mueve en su dirección normal una distancia $v\Delta t$ y a lo largo de la superficie horizontal una distancia $c_x\Delta t$. Por lo tanto la velocidad horizontal aparente es

$$c_x = v / \sin i. \quad (2.24)$$

La velocidad aparente es siempre mayor o igual a la velocidad del medio, α para ondas P y β para ondas S . Una onda que se propaga horizontalmente, con $i = 90$ deg, tiene una velocidad aparente igual a la velocidad del medio. Una onda plana vertical incidente llega a cualquier punto de la superficie al mismo tiempo, de modo que tiene una velocidad aparente infinita.

La velocidad horizontal aparente puede ser escrita en términos del componente hori-

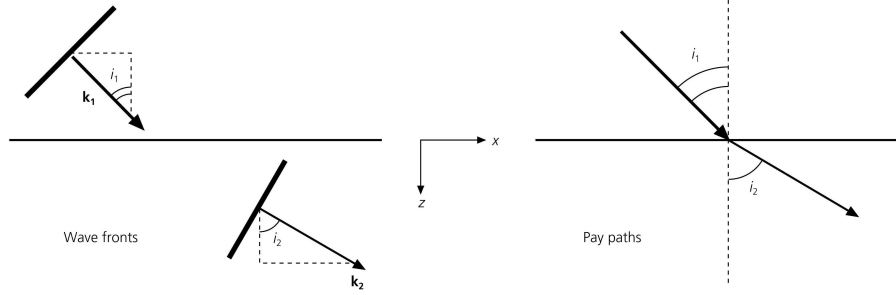


Figura 24: Una onda plana cambia su dirección cuando entra en un material con diferentes velocidades sísmicas. El cambio en dirección es representado por el cambio en la orientación del vector de onda $\underline{k}$, o por la trayectoria del rayo que muestra orientaciones sucesivas del vector de onda. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

zonal del vector de onda usando las ecs. (2.23) y (2.24)

$$c_x = \omega / k_x. \quad (2.25)$$

Por lo que se pueden escribir las proporciones de los número de onda verticales con respecto a los horizontales como

$$\begin{aligned} r_\alpha &= k_{z_\alpha} / k_x = (c_x^2 / \alpha^2 - 1)^{1/2} = \cot i \\ r_\beta &= k_{z_\beta} / k_x = (c_x^2 / \beta^2 - 1)^{1/2} = \cot j \end{aligned} \quad (2.26)$$

tal que los potenciales (2.21) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} (P) \quad \phi(x, z, t) &= A \exp(i(\omega t - k_x x \pm k_x r_\alpha z)) \\ (SV) \quad \Psi(x, z, t) &= B \exp(i(\omega t - k_x x \pm k_x r_\beta z)). \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.5. Ley de Snell

Ahora se analizará la relación entre los ángulos de incidencia para ondas armónicas $P - SV$ transmitidas y reflejadas en una interfaz. En la geometría de la Fig. 25, una interfaz en $z = 0$ separa el medio 1, con velocidades P y S dadas por α_1 y β_1 , del medio 2 con velocidades α_2 y β_2 . Primero se asumirá que $\alpha_1 < \alpha_2$ y $\beta_1 < \beta_2$. Una onda P incidente del medio 1 genera ondas P reflejadas y transmitidas. Además, parte de la onda P se convierte en ondas SV reflejadas y transmitidas. Cada una de estas ondas puede ser descrita por un potencial apropiado. En el medio 1 se tienen ondas P que suben y bajan y una onda SV que sube, tal que sus potenciales son

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= P \text{ incidente} + P \text{ reflejada} \\ &= A_1 \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_{\alpha_1} z)) + A_2 \exp(i(\omega t - k_x x + k_x r_{\alpha_1} z)) \\ \Psi(x, z, t) &= SV \text{ reflejada} \\ &= B_2 \exp(i(\omega t - k_x x + k_x r_{\beta_1} z)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

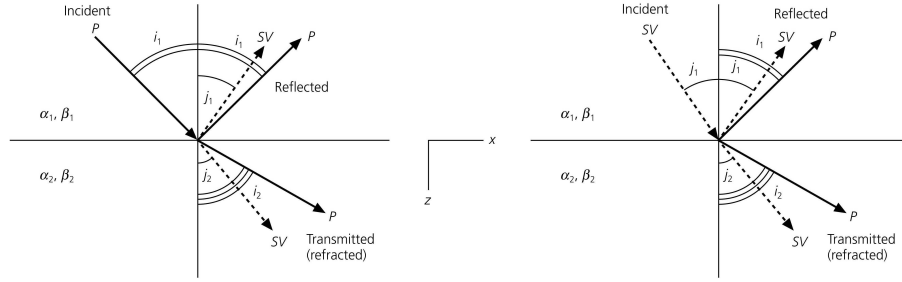


Figura 25: Ley de Snell para ondas planas que se propagan en a medio de alta velocidad. *Izquierda:* Una onda P incidente genera ondas P y SV transmitidas y reflejadas. La onda P reflejada tiene el mismo ángulo de incidencia, i_1 , que el de la onda P incidente. Como en cada medio la velocidad de la onda P excede a la velocidad de las S , $j_1 < i_1$ y $j_2 < i_2$. *Derecha:* La misma situación para una onda SV incidente. Los ángulos de incidencia de las ondas SV incidentes y reflejadas, j_1 , son iguales. Las relaciones entre los otros ángulos de incidencia son las mismas que para una onda P incidente. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

La forma de cada potencial describe la onda. La dirección de propagación de cada onda está dada por los componentes del vector de onda $\underline{k}$. Por ejemplo, los signos de k_x y $k_x r_{\alpha_1}$ muestran que la onda P incidente con amplitud A_1 viaja en las direcciones $+x$ y $+z$ conforme el tiempo avanza. De manera similar, la onda P reflejada con amplitud A_2 y la onda SV reflejada con amplitud B_2 viajan en las direcciones $+x$ y $-z$. Las ondas P y SV que bajan en el segundo medio tienen los siguientes potenciales

$$\begin{aligned}\phi(x, z, t) &= P \text{ transmitida} \\ &= A' \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_{\alpha_2} z)) \\ \Psi(x, z, t) &= SV \text{ transmitida} \\ &= B' \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta_2} z)).\end{aligned}\tag{2.29}$$

A' y B' son las amplitudes de las ondas P y SV transmitidas, que viajan en las direcciones $+x$ y $+z$. Comúnmente se escriben las amplitudes de las ondas P y S con A y B respectivamente.

Se pueden encontrar los ángulos de incidencia de las ondas transmitidas y reflejadas del ángulo de incidencia de la onda incidente. Las condiciones de frontera para una interfaz sólido-sólido en $z = 0$ son que sus desplazamientos y tracciones sean continuas. Como todos los potenciales contienen el factor de fase, $\exp(i(\omega t - k_x x))$ que multiplica un factor independiente de x y t , todos los desplazamientos y tracciones tienen este factor de fase. Para que el desplazamiento y la tracción sea continua en la interfaz para toda x y todo t , $(\omega t - k_x x)$ debe ser el mismo en cada potencial. Por lo tanto, el número de onda horizontal k_x , y por ende su velocidad aparente a lo largo de la interfaz $c_x = \omega/k_x$, debe ser la misma para cada onda. Como resultado, las ondas viajan a lo largo de la interfaz con la misma velocidad y permanecen en la misma fase.

Esta condición y la definición de c_x (2.24) derivan la *ley de Snell*

$$c_x = \frac{\alpha_1}{\sin i_1} = \frac{\beta_1}{\sin j_1} = \frac{\alpha_2}{\sin i_2} = \frac{\beta_2}{\sin j_2}, \quad (2.30)$$

la razón del seno del ángulo de incidencia de cada onda con su correspondiente velocidad es constante. Por lo tanto, las ondas P incidentes y reflejadas tienen el mismo ángulo de incidencia i_1 . Las ondas P y S transmitidas cambian su dirección por un factor que depende de la velocidad de los dos medios. El cambio en la dirección de las ondas transmitidas se conoce como *refracción*, de modo que las ondas en el segundo medio son conocidas también como ondas refractadas. La Fig. 25 ilustra las trayectorias de rayo para las diferentes ondas.

La onda S reflejada de la frontera satisface

$$\sin j_1 = \sin i_1 (\beta_1 / \alpha_1) \quad (2.31)$$

Como en cualquier medio las ondas P viajan más rápido que las ondas S , la ley de Snell requiere que $j_1 < i_1$. Por lo tanto el rayo S reflejado es más cercano a la vertical que el rayo P en el mismo medio. Físicamente, eso es porque la onda S debe estar más cerca a la vertical que la onda P para tener la misma velocidad aparente a lo largo de la interfaz.

El ángulo de incidencia para la onda P refractada está relacionada al de la onda P incidente por

$$\sin i_2 = \sin i_1 (\alpha_2 / \alpha_1). \quad (2.32)$$

Si el segundo medio tiene una velocidad mayor, $i_2 > i_1$, entonces el rayo transmitido está más alejado de la vertical que el rayo incidente. Este viaja más horizontal, para que las velocidades aparentes a lo largo de la interfaz sean iguales. Por otro lado, si $\alpha_1 > \alpha_2$, entonces la onda P refractada estará más cercana a una incidencia normal.

La onda S transmitida satisface

$$\sin j_2 = \sin i_1 (\beta_2 / \alpha_1). \quad (2.33)$$

De modo que para $\beta_2 > \beta_1$, $j_2 > j_1$, se tiene que la onda S transmitida es más cercana a la horizontal que la onda S reflejada. Relaciones similares se aplican para una onda SV incidente (Fig. 25). El rayo P reflejado se aleja aún más de la normal que los rayos SV reflejados o transmitidos.

El hecho de que una onda P incidente genere tanto ondas P como SV , y viceversa, es una consecuencia de las condiciones de frontera de desplazamiento y tracciones en la interfaz. A pesar de que este tema se desarrollará más adelante, un poco de intuición puede obtenerse al observar la Fig. 26, en la cual una onda incidente SV deforma la frontera y por consecuencia genera ondas P además de las ondas SV transmitidas y reflejadas.

2.6. Ángulo crítico

Cuando una onda P incide en una frontera horizontal, la ec. (2.32) muestra que el ángulo de incidencia de la onda P transmitida en el segundo medio es

$$i_2 = \sin^{-1}(\sin i_1 (\alpha_2 / \alpha_1)), \quad (2.34)$$

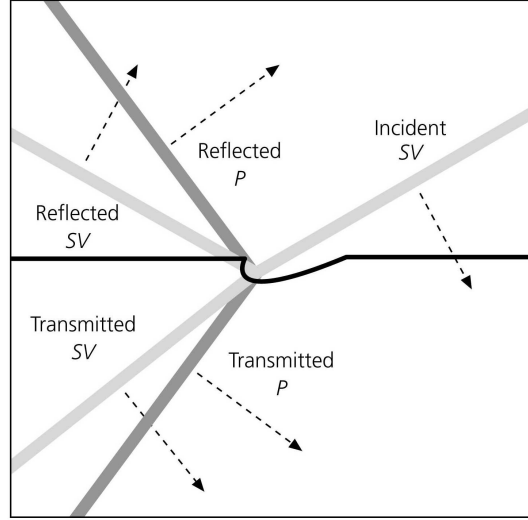


Figura 26: Interacción de una onda SV incidente con la frontera. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

donde la notación $\sin^{-1}$ indica el inverso de la función seno. Si el segundo medio tiene una velocidad mayor, la onda P transmitida está más alejada de la vertical que el rayo incidente. Como el ángulo de incidencia se incrementa, el rayo transmitido se acerca a la interfaz horizontal (Fig. 27). Eventualmente, el ángulo de incidencia i_1 alcanza un valor i_c donde $i_2 = 90^\circ$ y el argumento de $\sin^{-1}$ se vuelve 1,

$$\sin i_c(\alpha_2/\alpha_1) = 1 \text{ o } \sin i_c = \alpha_1/\alpha_2. \quad (2.35)$$

Por lo tanto para una onda incidente a este ángulo crítico de incidencia, la onda transmitida roza la interfaz.

Una vez que el ángulo de incidencia excede el ángulo crítico, que es una situación llamada *incidencia postcrítica*, no hay transmisión de ondas planas en el segundo medio. Este fenómeno es algunas veces llamado *reflexión interna total*. En este caso como se verá más adelante, el potencial de la onda P tiene un término exponencial real que depende de z , $\exp(-k_z z)$, en lugar de un término exponencial puramente imaginario, $\exp(-ik_z z)$. Por lo que el desplazamiento en el segundo medio no es una onda que se propaga, sino una *onda evanescente* que viaja a lo largo de la interfaz y decae lejos de la interfaz.

A pesar de que para ángulos de incidencia mayores el ángulo crítico no hay onda P transmitida, aún puede haber onda S transmitida. Si la velocidad S del medio 2 es mayor que la velocidad P en el medio 1, existe un segundo ángulo crítico

$$\sin i_{c2} = \alpha_1/\beta_2. \quad (2.36)$$

Para ángulos mayores a este segundo ángulo crítico no se presenta ningún tipo de onda transmitida.

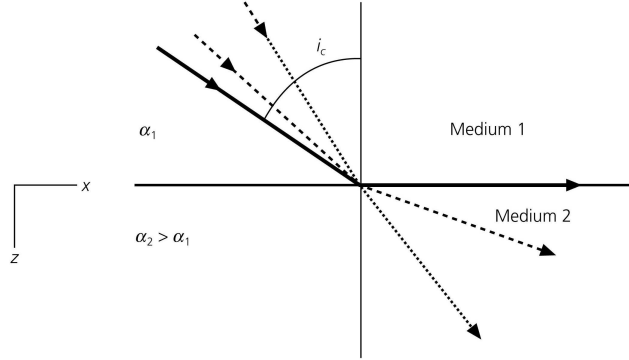


Figura 27: Ilustración del ángulo crítico i_c para ondas P incidentes en un medio más rápido. La onda S transmitida y las ondas P y S reflejada no están mostradas. Conforme el ángulo de incidencia se incrementa, la ondas incidentes se acercan a la horizontal y la las ondas P a la interfaz. Para ondas incidentes con un ángulo mayor al ángulo crítico, no se producen ondas P transmitidas en el medio 2. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

2.7. Ley de Snell para ondas SH

La ley de Snell también aplica para ondas SH . Como para las ondas SH , los desplazamientos satisfacen la ecuación de onda. Las ondas SH en el primer medio están descritas por

$$u_y(x, z, t) = B_1 \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta_1} z)) + B_2 \exp(i(\omega t - k_x x + k_x r_{\beta_1} z)), \quad (2.37)$$

donde B_1 y B_2 son las amplitudes de la ondas SH incidente y reflejadas (Fig. 28). En el segundo medio, la onda SH transmitida es

$$u_y(x, z, t) = B' \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta_2} z)). \quad (2.38)$$

Como en la sección anterior, la continuidad en la interfaz se cumple con la ley de Snell

$$c_x = \beta_1 / \sin j_1 = \beta_2 / \sin j_2, \quad (2.39)$$

porque $(\omega t - k_x x)$ debe ser el mismo para las tres onda.

El ángulo crítico para ondas SH es entonces

$$\sin j_c = \beta_1 / \beta_2. \quad (2.40)$$

2.8. Parámetro de rayo y lentitud

Una forma útil de caracterizar la trayectoria de rayo es a través del *parámetro de rayo*, p , que es el recíproco de la velocidad horizontal aparente,

$$p = 1/c_x = \sin i/v = k_x/\omega, \quad (2.41)$$

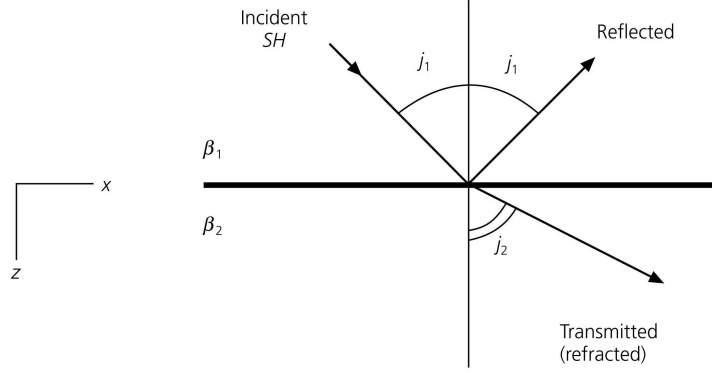


Figura 28: Una onda SH que se propaga en el plano $x - z$ solo genera ondas SH transmitidas y reflejadas cuando esta incide en una interfaz sólido-sólido en el plano $x - y$. Las ondas incidentes y reflejadas tienen el mismo ángulo de incidencia j_1 . Para $\beta_2 > \beta_1$, $j_2 > j_1$. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

donde i es el ángulo de incidencia para una onda P o S , y v es la velocidad correspondiente. La onda armónica plana puede ser escrita en términos del parámetro de rayo. Para ilustrar esto, considere el potencial de una onda P que se propaga en el plano $x - z$, y se factoriza la frecuencia angular

$$\begin{aligned} \exp(i(\omega t - k_x x - k_z r_\alpha z)) &= \exp(i\omega(t - (k_x/\omega)x - (k_z/\omega)r_\alpha z)) \\ &= \exp(i\omega(t - px - \eta_\alpha z)) \\ &= \exp(i\omega(t - \underline{s} \cdot \underline{x})), \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde el *vector de lentitud* $\underline{s}$ se define como

$$\underline{s} = (p, \eta_\alpha), \quad (2.43)$$

cuyos componentes son los parámetros de rayo p y $\eta_\alpha = (k_x/\omega)r_\alpha = pr_\alpha = r_\alpha/c_x = (1/\alpha^2 - p^2)^{1/2}$.

Se puede interpretar η_α usando los componentes del vector de onda, porque $r_\alpha = k_{z_\alpha}/k_x$, tal que

$$\eta_\alpha = k_{z_\alpha}/\omega = k_{z_\alpha}/(|\underline{k}_\alpha|\alpha) = \cos i/\alpha. \quad (2.44)$$

η_α y p están relacionados porque ambos son funciones del ángulo de incidencia divididos por su velocidad. De modo que la magnitud del vector de lentitud es

$$|\underline{s}| = (p^2 + \eta_\alpha^2)^{1/2} = (\sin^2 i/\alpha^2 + \cos^2 i/\alpha^2)^{1/2} = 1/\alpha, \quad (2.45)$$

que es el recíproco de la velocidad $1/\alpha$ llamada *lentitud escalar*, un término adecuado porque un medio de baja velocidad tiene lentitud grande, mientras que medios de alta velocidad tienen lentitud pequeña.

El vector de lentitud (Fig. 29) está dirigido a lo largo del rayo (paralelo al vector de

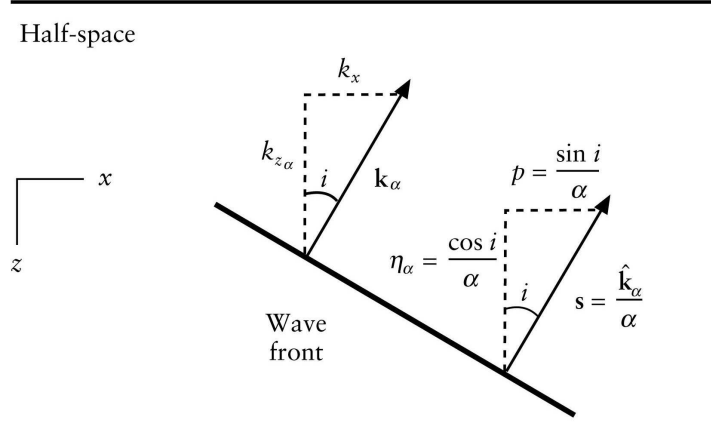


Figura 29: Interpretación geométrica de la propagación de una P . Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

onda) con una magnitud igual a la lentitud, y puede ser escrito como $\underline{s} = \hat{\underline{k}}_\alpha / \alpha$. Sus componentes son el parámetro de rayo p , también llamada *lentitud horizontal* y η_α , llamada *lentitud vertical*. De manera similar para ondas S la lentitud es

$$\begin{aligned}\underline{s} &= (p, \eta_\beta) = \hat{\underline{k}}_\beta / \beta, \\ \eta_\beta &= (1/\beta^2 - p^2)^{1/2} = \cos j / \beta = pr_\beta = r_\beta / c_x.\end{aligned}\quad (2.46)$$

Escribir una onda armónica plana en términos de la lentitud resulta conveniente para despertar mayor intuición. En el argumento de la exponencial de la ec. (2.42), $(i\omega(t - \underline{s} \cdot \underline{x}))$, el término de la lentitud, $\underline{s} \cdot \underline{x}$, tiene la dimensión de tiempo, y es el tiempo de viaje neto debido a los tiempos de propagación vertical y horizontal, cada uno de los cuales es descrito por correspondiente componente de la lentitud.

La formulación de lentitud también da otra visión de la ley de Snell. Se derivó la ley de Snell al considerar una onda armónica plana incidente en una interfaz horizontal y las correspondientes ondas planas reflejadas y transmitidas. El componente horizontal de los vector de onda k_x , y por lo tanto de la velocidad aparente horizontal c_x , eran continuos en la interfaz. En contraste, los términos relacionados con el componente vertical de los vectores de onda, como $k_z = k_x r_\alpha$, variaban entre capas para ondas P y S . La formulación correspondiente en términos de la lentitud dice que el parámetro de rayo u lentitud horizontal p es la misma para las ondas incidente, reflejadas y transmitidas, mientras que la lentitud vertical depende del medio y del tipo de onda. La ley de Snell puede entonces enunciar que p es constante para un rayo y cualquier otro que se produzca en las interfaces.

Una aplicación importante del parámetro de rayo es la de describir la evolución de un rayo cuando se topa con un número de interfaces. Cada uno de los cuatro rayos generados en la primer interfaz a su vez generan otros cuatro rayos en la siguiente interfaz, y así sucesivamente. Como la ley de Snell se aplica en cada interfaz, todos estos rayos tienen el mismo parámetro de rayo. Como resultado, p es constante a lo largo

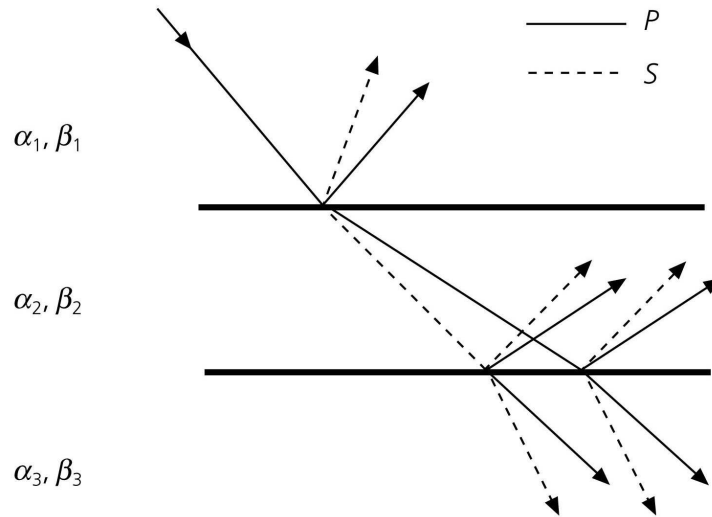


Figura 30: Una onda P incidente en una pila de capas planas genera cuatro ondas, dos reflejadas y dos transmitidas, en cada interfaz. Cada una de estas ondas generan cuatro más en cada interfaz, y así sucesivamente. Todas estas ondas tienen el mismo parámetro de rayo, de modo que sus trayectorias pueden ser trazadas al aplicar la ley de Snell en cada interfaz. Imagen tomada de Stein y Wyss (2003).

de cualquier trayectoria de rayo, sin importar cuantas transmisiones, reflexiones o conversiones haya sufrido. Esto ofrece una manera de trazar la trayectoria de rayo para un rayo que comienza su viaje con un cierto parámetro de rayo. Al hacer esto en una computadora, la ventaja de usar el parámetro de rayo es que es cero para una incidencia vertical, mientras que c_x es infinita.

2.9. Principio de Fermat y Teoría de rayo geométrica

Como se ha visto hasta el momento, se puede ganar intuición en el comportamiento de las ondas sísmicas al considerar sus correspondientes trayectorias de rayo. Esta aproximación, estudiar la propagación de onda usando trayectorias de rayo, es llamada *teoría de rayo geométrica*. A pesar de que no describe totalmente los aspectos importantes de la propagación de onda, es muy usada porque generalmente simplifica mucho el análisis y conduce a una respuesta correcta o a una buena aproximación.

La aplicación más obvia de los rayos es el cómputo de los tiempos de viaje. Para encontrar cuando una onda plana generada en una posición va a llegar a otra, se usa el tiempo de viaje, que es la longitud del rayo dividido por la velocidad. Tal que, si las ondas viajan por trayectorias complicadas, su tiempo de viaje es la suma de los tiempos de viaje de cada porción de la trayectoria de rayo. Los tiempos de viaje de un rayo que ha viajado a través de diferentes medios, algunas veces como una onda P y otras como una onda S , es encontrado usando de manera apropiada la longitud de la trayectoria y

la velocidad para cada segmento.

El concepto que sustenta este enfoque es el *principio de Fermat*, un famoso resultado

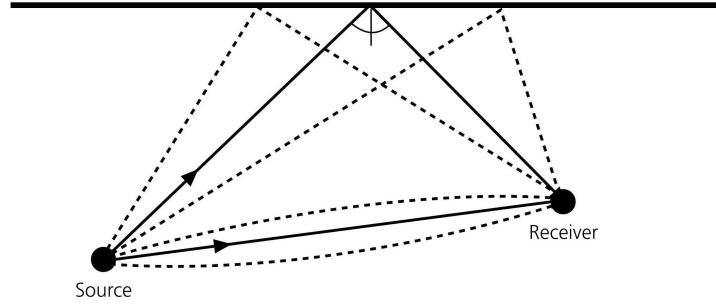


Figura 31: Dos trayectorias de rayo (líneas sólidas), una para el rayo directo y otra para la reflexión que obedece la ley de Snell, conectando dos puntos en un semi-espacio homogéneo. El tiempo de viaje para estas trayectorias es menor que el de trayectorias adyacentes (líneas punteadas), en acuerdo con el principio de Fermat. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

de óptica originado del estudio de la luz. El principio de Fermat enuncia que las trayectorias de rayo entre dos puntos son aquellas para las cuales el tiempo de viaje es un mínimo, con respecto a las posibles trayectorias. El caso más sencillo son dos puntos en un semi-espacio homogéneo; el tiempo requerido para recorrer la línea recta que los conecta es mejor que las trayectorias adyacentes (Fig. 31). Una segunda trayectoria de rayo para la cual el tiempo es mínimo comparado con el de trayectorias adyacentes es el rayo reflejado que satisface la ley de Snell. La trayectoria de rayo directa corresponde a un mínimo absoluto del tiempo de viaje, mientras que el del rayo reflejado corresponde a un mínimo local.

La ley de Snell puede derivarse del principio de Fermat. Considere las posibles trayectorias de rayo (Fig. 32) entre los puntos $(0, a)$ en el medio 1, con velocidad v_1 , y $(b, -c)$ en el medio 2, con velocidad v_2 . Las trayectorias de rayo pueden ser parametrizadas por el punto $(x, 0)$ donde cruzan la interfaz. El tiempo de viaje es una función de x

$$T(x) = \frac{(a^2 + x^2)^{1/2}}{v_1} + \frac{((b - x)^2 + c^2)^{1/2}}{v_2}. \quad (2.47)$$

Para encontrar la trayectoria para la cual el tiempo de viaje es un mínimo, se deriva con respecto a x y se iguala a cero,

$$\begin{aligned} \frac{dT(x)}{dx} &= \frac{x}{v_1(a^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{(b - x)}{v_2((b - x)^2 + c^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\sin i_1}{v_1} - \frac{\sin i_2}{v_2} = 0, \end{aligned} \quad (2.48)$$

que conduce a la ley de Snell,

$$v_1 / \sin i_1 = v_2 / \sin i_2. \quad (2.49)$$

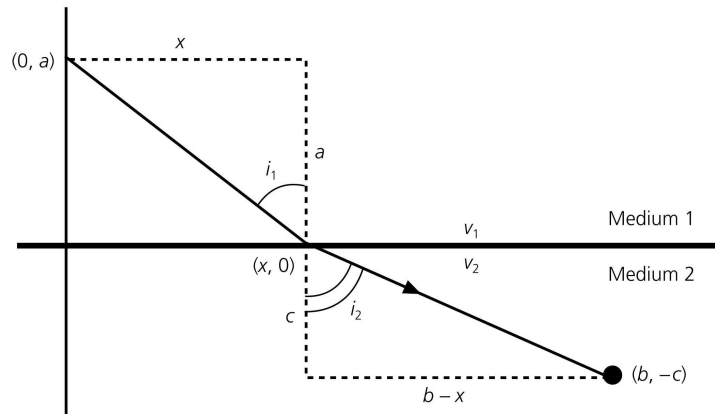


Figura 32: Derivación de la ley de Snell en el caso de refracción usando el principio de Fermat. La trayectoria de rayo entre dos puntos en lados opuestas de una interfaz está dada por aquella que tiene el tiempo de viaje mínimo. Imagen tomada de Stein y Wyss (2003).

Para la mayoría de las aplicaciones sismológicas las trayectorias de rayo y los tiempos de viaje que se derivan usando la ley de Snell conducen a resultados razonables de acuerdo a las observaciones, porque la mayor parte de la energía sísmica se propaga como si siguiera trayectorias de rayo. Sin embargo, la teoría geométrica de rayo es solo una aproximación a la solución de la ecuación elástica de movimiento que describe la generación y propagación de energía sísmica. Como resultado, la teoría de rayo tiene dos grandes limitaciones. Primero, no proporciona información acerca de las amplitudes de onda. Por lo tanto, a pesar de que la ley de Snell permite el cálculo de los ángulos de ondas reflejadas y transmitidas, se requiere de la teoría de onda para encontrar sus amplitudes. En algunos casos, esta limitación puede eludirse al trazar los rayos de la fuente y usar la densidad de rayos para inferir sus amplitudes. Segundo, en otras aplicaciones, los rayos geométricos fallan al describir el comportamiento de la onda. Por ejemplo, ondas difractas o dobladas cerca del núcleo de la Tierra por heterogeneidades en el manto, alcanzan lugares que no pueden ser predichos utilizando la ley de Snell.

2.10. Coeficientes de reflexión y transmisión de ondas planas

La propagación de ondas sísmicas en la Tierra encuentran varios tipos de interfaces (Fig. 33) en las cuales las propiedades físicas cambian en distancias muy cortas. Por ejemplo, la superficie de la Tierra es una superficie libre, y el fondo del mar es una interfaz líquido-sólido. Variaciones en la velocidad y densidad causan interfaces sólido-sólido como la *discontinuidad de Mohorovičić*, o *Moho*, que separa la corteza del manto. Los mantos superior e inferior están divididos por regiones de rápido cambio de velocidad que pueden ser descritos para muchos propósitos como interfaces sólido-sólido. La frontera del núcleo-manto es una interfaz entre el manto sólido y el núcleo exterior líquido, y la base del núcleo exterior es una interfaz con el núcleo

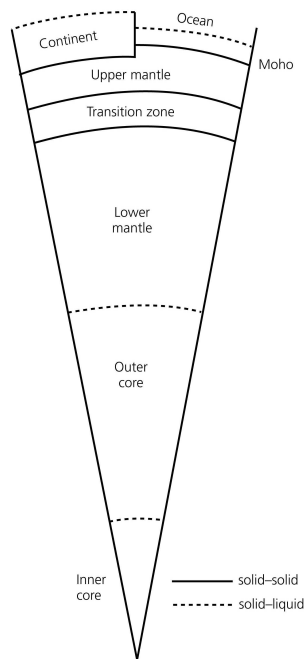


Figura 33: Diferentes tipos de frontera en el interior de la Tierra. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

interior sólido. Casi todo el conocimiento de estas interfaces proviene de observar sus efectos en la propagación de ondas sísmicas.

En la sección anterior, se derivó la ley de Snell, que relaciona el doblado de las ondas en una interfaz por el contraste de velocidades a través de esta. Ahora se discutirá las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas. Primero se considerarán dos casos sencillos, las ondas SH en una interfaz sólido-sólido y las ondas $P - SV$ en una frontera libre, y después se describe como esta misma metodología es aplicada para ondas $P - SV$ en una interfaz entre sólidos. Resulta que a pesar de que los ángulos de reflexión y transmisión, y por lo tanto las trayectorias de rayo y los tiempos de viaje, dependen solamente de las velocidades, las amplitudes dependen de las constantes elásticas de una manera más complicada. Como resultado, las amplitudes de las ondas proveen mayor información que los tiempos de viaje, la cual es muy apreciada en el estudio del interior de la Tierra.

El análisis de la energía permite tener un mayor entendimiento del comportamiento observado por las ondas reflejadas y transmitidas. Por lo tanto, en la siguiente subsección se introducirá la energía de una onda plana, conceptos que posteriormente serán utilizados para la evaluación de la partición de energía por la presencia de interfaces.

2.10.1. Energía en una onda plana

Las ondas sísmicas transportan energía tanto cinética¹⁴ como potencial. Para encontrar esta energía, considere ondas armónicas planas S y P que viajan en la dirección de z . Una onda SH con desplazamiento en la dirección y es

$$u_y(z, t) = B \cos(\omega t - kz), \quad (2.50)$$

donde esta expresión está directamente en términos del desplazamiento, en lugar del potencial.

La energía cinética en un volumen V es la integral de la suma de la energía cinética asociada con cada componente del desplazamiento

$$KE = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV, \quad (2.51)$$

porque la masa es $m = \rho dV$. Por lo que para una onda plana (ec. 2.50), la energía cinética por unidad de frente de onda promediada a lo largo de la longitud de onda λ es

$$KE = \frac{1}{2\lambda} \rho B^2 \omega^2 \int_0^\lambda \sin^2(\omega t - kz) dz = \frac{1}{2\lambda} \rho B^2 \omega^2 \frac{\lambda}{2} = B^2 \omega^2 \rho / 4. \quad (2.52)$$

La energía de deformación o potencial¹⁵ es

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV. \quad (2.53)$$

Como los únicos componentes diferentes de cero de las deformaciones son

$$e_{32} = e_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z} = Bk \sin(\omega t - kz) / 2, \quad (2.54)$$

entonces los únicos componentes del tensor de esfuerzos diferentes de cero son

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = \mu Bk \sin(\omega t - kz), \quad (2.55)$$

y la energía de deformación por unidad de área de frente de onda promediada por la longitud de onda en la dirección de propagación es

$$W = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\lambda \mu B^2 k^2 \sin^2(\omega t - kz) dz = \mu B^2 k^2 / 4 = B^2 \omega^2 \rho / 4, \quad (2.56)$$

¹⁴La *energía cinética* de un cuerpo es aquella energía que posee debido a su movimiento. Se define como el trabajo necesario para acelerar un cuerpo de una masa determinada desde el reposo hasta la velocidad indicada. Una vez conseguida esta energía durante la aceleración, el cuerpo mantiene su energía cinética salvo que cambie su velocidad. Para que el cuerpo regrese a su estado de reposo se requiere un trabajo negativo de la misma magnitud que su energía cinética.

¹⁵La *energía potencial* es la energía que mide la capacidad que tiene dicho sistema para realizar un trabajo en función exclusivamente de su posición o configuración. Puede pensarse como la energía almacenada en el sistema, o como una medida del trabajo que un sistema puede entregar.

donde la última expresión utiliza el hecho de que $\mu = \beta^2 \rho$ y $\beta k = \omega$. Por lo tanto, la energía de deformación y la energía cinética promediadas con respecto a la longitud de onda son iguales. Por lo tanto, la energía total promediada sobre una longitud de onda es

$$E = KE + W = B^2 \omega^2 \rho / 2, \quad (2.57)$$

y el flujo de energía promediado en la dirección de propagación se encuentra al multiplicarlo por la velocidad

$$\dot{E} = B^2 \omega^2 \rho \beta / 2. \quad (2.58)$$

La energía total y el flujo son proporcionales al cuadrado de la amplitud y la frecuencia, tal que para ondas de la misma amplitud, las ondas de más altas frecuencias transportan más energía.

De forma similar, una onda P plana que se propaga en la dirección z , puede describirse por el potencial escalar

$$\phi(z, t) = A \exp(i(\omega t \pm kz)) \quad (2.59)$$

tiene un desplazamiento que es el gradiente del potencial

$$\underline{u}(z, t) = \nabla \phi(z, t) = (0, 0, -ik) A \exp(i(\omega t - kz)), \quad (2.60)$$

con parte real

$$u_z(z, t) = Ak \sin(\omega t - kz). \quad (2.61)$$

Usando la ec. (2.51), la energía cinética por unidad de frente de onda promediada sobre una longitud de onda es

$$KE = \frac{1}{2\lambda} \rho A^2 k^2 \omega^2 \int_0^\lambda \cos^2(\omega t - kz) dz = A^2 \omega^2 k^2 \rho / 4. \quad (2.62)$$

Para encontrar la energía de deformación (ec. (2.53)), note que el único componente de los esfuerzos diferente de cero es

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) e_{zz} = \rho \alpha^2 e_{zz}, \quad (2.63)$$

donde la última forma elimina la constante de Lamé λ , lo que permite reservar el símbolo λ para la longitud de onda. Por lo que la energía de deformación por unidad de frente de onda promediada a lo largo de la longitud de onda es

$$W = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\lambda \rho \alpha^2 A^2 k^4 \cos^2(\omega t - kz) dz = A^2 \omega^2 k^2 \rho / 4, \quad (2.64)$$

que iguala a la energía cinética. Tal que la energía total promediada a lo largo de la longitud de onda es

$$E = KE + W = A^2 \omega^2 k^2 \rho / 2, \quad (2.65)$$

y el flujo de energía promediado en la dirección de propagación se encuentra al multiplicarlo por la velocidad de la onda P

$$\dot{E} = A^2 \omega^2 k^2 \rho \alpha / 2. \quad (2.66)$$

Estas expresiones difieren de aquellas de la energía de la onda SH por un factor de k^2 , porque A es la amplitud del potencial, mientras que en las ecs. (2.57) y (2.58) B es la amplitud del deslizamiento. Si se usara la amplitud del potencial para la onda de corte, el factor k^2 sería necesario.

El flujo de energía ofrece un mayor intuición en como las ondas se comportan cuando cambian de medio. Por ejemplo, cuando las ondas de agua viajan a aguas poco profundas, sus velocidades disminuyen, por lo que sus amplitudes se incrementan para conservar la energía. Eventualmente las amplitudes exceden un nivel crítico y las ondas rompen, i.e. se forman las olas. De manera similar, cuando las ondas sísmicas pasan de roca a tierra suave con menor velocidad y densidad, sus amplitudes crecen.

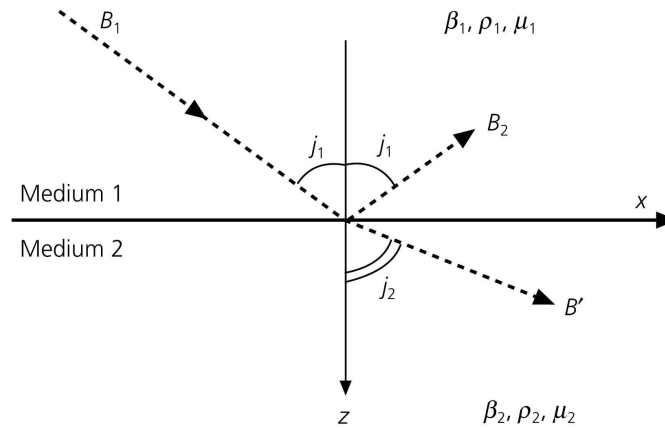


Figura 34: Geometría de una onda SH en un medio 1 que incide en una interfaz sólido-sólido con el medio 2. B_1 , B_2 y B' son las amplitudes de las ondas SH incidente, reflejada y transmitida. El desplazamiento es en la dirección y . Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

2.11. Coeficientes de reflexión y transmisión de ondas SH

Primero considere las amplitudes de ondas SH reflejadas y transmitidas en una interfaz horizontal. La Fig. 34 ilustra la geometría de una onda SH que se propaga en el plano $x - z$ que incide en una frontera en el plano $x - y$ que separa a medios con velocidades de corte, rigideces y densidades β_i , μ_i y ρ_i . Para ondas SH , el único componente diferente de cero del desplazamiento u_y , satisface la ecuación de onda (2.20), describe los desplazamientos como ondas armónicas planas en ambos lados de la frontera. Como z es definida positiva hacia abajo, los exponenciales con $-k_x r_{\beta_i} z$ representan ondas que bajan en el medio i , y aquellos con $+k_x r_{\beta_i} z$ representan ondas que suben. En el medio 1 ($z < 0$) existe una onda incidente que baja con amplitud B_1 y una onda reflejada que sube con amplitud B_2 ,

$$u_y^-(x, z, t) = B_1 \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta_1} z)) + B_2 \exp(i(\omega t - k_x x + k_x r_{\beta_1} z)). \quad (2.67)$$

En el medio 2 ($z > 0$) existe solamente una onda transmitida con amplitud B' ,

$$u_y^+(x, z, t) = B' \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta_2} z)). \quad (2.68)$$

Para encontrar las amplitudes, se usan las condiciones de interfaz sólido-sólido (Tabla 2.1) que pide que tanto los desplazamientos como las tracciones sean continuos en la frontera $z = 0$ para todo x y t . La continuidad del desplazamiento requiere que

$$\begin{aligned} u_y^-(x, 0, t) &= u_y^+(x, 0, t) \\ (B_1 + B_2) \exp(i(\omega t - k_x x)) &= B' \exp(i(\omega t - k_x x)). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Cuando se derivó la ley de Snell, se encontró que $(\omega t - k_x x)$ es el mismo para las tres ondas, de modo que se pueden cancelar los exponenciales y obtener una condición en las amplitudes,

$$B_1 + B_2 = B'. \quad (2.70)$$

La otra condición proviene de la condición de que el vector de tracción sea continuo $T_i = \sigma_{ij} n_j$. Como el vector normal unitario para la interfaz es $(0, 0, 1)$, los componentes del tensor de esfuerzos σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} son continuos. Para ondas SH u_x y u_z son cero, por lo que $\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0$, y σ_{yz} es continuo. Se utiliza la ley de Hooke

$$\sigma_{yz} = 2\mu e_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \quad (2.71)$$

En la interfaz, $z = 0$, los esfuerzos satisfacen

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^-(x, 0, t) &= \sigma_{yz}^+(x, 0, t), \\ \mu_1 i k_x r_{\beta_1} (B_2 - B_1) \exp(i(\omega t - k_x x)) &= -\mu_2 i k_x r_{\beta_2} B' \exp(i(\omega t - k_x x)). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Cancelando los factores comunes en ambos lados se obtiene la segunda condición

$$(B_1 - B_2) = B' (\mu_2 r_{\beta_2}) / (\mu_1 r_{\beta_1}). \quad (2.73)$$

Resolviendo las ecs. (2.70) y (2.73) de manera simultánea se obtienen las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida. Primero, se elimina B_2 y se encuentra el coeficiente de transmisión,

$$T_{12} = \frac{B'}{B_1} = \frac{2\mu_1 r_{\beta_1}}{\mu_1 r_{\beta_1} + \mu_2 r_{\beta_2}}, \quad (2.74)$$

la razón de la amplitud de la onda transmitida en el medio 2 con respecto a la onda incidente del medio 1. De manera similar, eliminando B' de las ecs. (2.70) y (2.73) se obtiene el coeficiente de reflexión

$$R_{12} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{\mu_1 r_{\beta_1} - \mu_2 r_{\beta_2}}{\mu_1 r_{\beta_1} + \mu_2 r_{\beta_2}}, \quad (2.75)$$

la razón de las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida en el medio 1.

Los coeficientes de reflexión y transmisión dependen del ángulo de incidencia porque

$$r_{\beta_i} = c_x \cos j_i / \beta_i \quad (2.76)$$

Por lo tanto, usando la ec. (2.76) y la definición de la velocidad de onda S , $\mu_i = \rho_i \beta_i^2$, los coeficientes de transmisión y reflexión pueden escribirse como

$$\begin{aligned} T_{12} &= \frac{2\rho_1\beta_1 \cos j_1}{\rho_1\beta_1 \cos j_1 + \rho_2\beta_2 \cos j_2} \\ R_{12} &= \frac{\rho_1\beta_1 \cos j_1 - \rho_2\beta_2 \cos j_2}{\rho_1\beta_1 \cos j_1 + \rho_2\beta_2 \cos j_2}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Por lo que los coeficientes de reflexión y transmisión dependen de las impedancias acústicas $\rho_i\beta_i$. Si los medios están intercambiados, el coeficiente de reflexión cambia su polaridad, $R_{12} = -R_{21}$, y los coeficientes de transmisión satisfacen $T_{12} + T_{21} = 2$. Debido a la condición de continuidad del desplazamiento (ec. (2.69)), $1 + R_{12} = T_{12}$. Grandes contrastes de impedancia favorecen la reflexión, mientras que pequeños contrastes favorecen la transmisión. En el límite en que los medios son idénticos no hay reflexión ($R_{12} = 0$), y todo es transmitido ($T_{12} = 1$).

Un efecto interesante ocurre para una onda SH incidente en la superficie libre de la Tierra. Como $\beta_2 = 0$, el coeficiente de reflexión es igual a 1 sin importar el ángulo de incidencia, tal que el desplazamiento es doble para la onda que sube. Esto también ocurre en las interfaces sólido-líquido, como el fondo marino o la frontera núcleo-manto, que actúan como superficies libres para ondas SH porque las ondas SH no se propagan en el líquido.

Los coeficientes de transmisión y reflexión tienen una forma simple para el caso de incidencia vertical ($j_1 = j_2 = 0$)

$$T_{12} = \frac{2\rho_1\beta_1}{\rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2}, \quad R_{12} = \frac{\rho_1\beta_1 - \rho_2\beta_2}{\rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2}. \quad (2.78)$$

Estas formas de incidencia vertical son fáciles de recordar y son aproximaciones útiles para casos de incidencia que no son verticales.

El hecho de que los coeficientes de transmisión y reflexión dependen del contraste tanto de la densidad como de la velocidad, mientras que los ángulos de las ondas dependen únicamente de su velocidad, hacen a las amplitudes valiosas para estudiar las propiedades elásticas a partir de observaciones sismológicas. A pesar de que cada medio tiene tres cantidades de interés, β_i , μ_i y ρ_i , solamente dos son independientes, porque las velocidades dependen de las rigideces y densidades. Por ejemplo, si se observa la velocidad y la rigidez como independientes, los ángulos de reflexión y transmisión dan información acerca de la velocidad, y las amplitudes proveen información adicional sobre la rigidez.

2.12. Flujo de energía de ondas SH reflejadas y transmitidas

En algunos casos los coeficientes de transmisión exceden 1. Por ejemplo, cuando una onda SH incide en un medio de mayor velocidad con una incidencia crítica, la onda transmitida se vuelve horizontal ($j_2 = 90^\circ$) y la ec. (2.77) arroja un coeficiente de transmisión igual a 2. Este curioso efecto puede ser explicado al examinar como la energía de la onda incidente se divide entre las ondas reflejadas y transmitidas.

Se observó en la Sección 2.10.1 que el flujo de energía por unidad de frente de onda

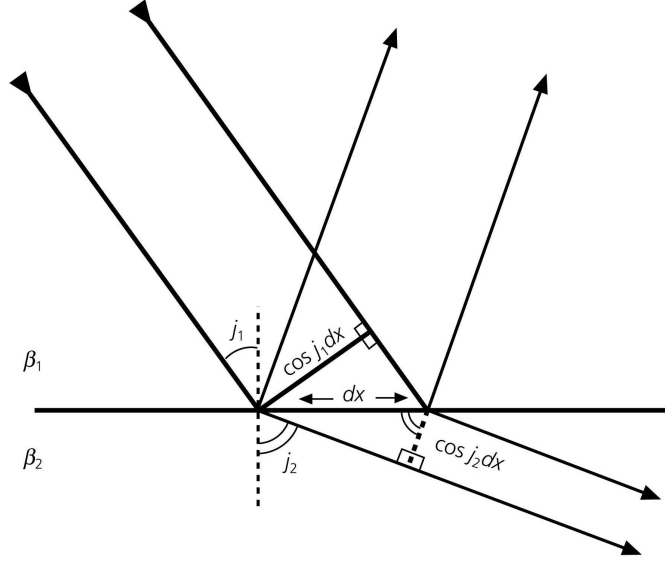


Figura 35: Las longitudes de los frente de onda incidente, reflejada y transmitida contribuyen al flujo de energía a través de un elemento dx de una interfaz que dependen del coseno del ángulo de incidencia de cada onda. Imagen tomada de Stein y Wyession (2003).

en la dirección de propagación asociada con una onda armónica plana SH $u(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ es el producto de la densidad de energía y la velocidad

$$\dot{E} = A^2 \omega^2 \rho \beta / 2. \quad (2.79)$$

Como la energía no se acumula en la interfaz, el flujo de energía en la longitud del frente de onda que incide en un elemento dx de la interfaz iguala la energía de las ondas reflejadas y transmitidas removiéndole la energía de la interfaz. La longitud de los frente de onda que contribuyen al flujo dependen de los ángulos de incidencia. La Fig. 35 muestra que la longitudes relevantes son $\cos j_1 dx$ para las ondas incidente y reflejadas, y $\cos j_2 dx$ para la onda transmitida. Por lo tanto, para una onda incidente de amplitud unitaria, los flujos de energía para las ondas incidente, reflejada y transmitida son

$$\begin{aligned} \dot{E}_I &= \omega^2 \rho_1 \beta_1 \cos j_1 dx / 2 \\ \dot{E}_R &= R_{12}^2 \omega^2 \rho_1 \beta_1 \cos j_1 dx / 2 \\ \dot{E}_T &= T_{12}^2 \omega^2 \rho_2 \beta_2 \cos j_2 dx / 2. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Estas satisfacen la conservación de energía

$$\dot{E}_I = \dot{E}_R + \dot{E}_T. \quad (2.81)$$

Las razones de los flujos de energía transmitida y reflejada con respecto a la energía incidente son

$$\frac{\dot{E}_R}{\dot{E}_I} = R_{12}^2 \text{ y } \frac{\dot{E}_T}{\dot{E}_I} = T_{12}^2 \frac{\rho_2 \beta_2 \cos j_2}{\rho_1 \beta_1 \cos j_1}. \quad (2.82)$$

Como las razones de energía son proporcionales al cuadrado de las amplitudes, pequeñas amplitudes representan energías muy pequeñas. Por ejemplo, una onda reflejada con $R_{12} = 0.1$ tiene una razón de energía de $\dot{E}_R/\dot{E}_I = 0.01$. Para observar la depen-

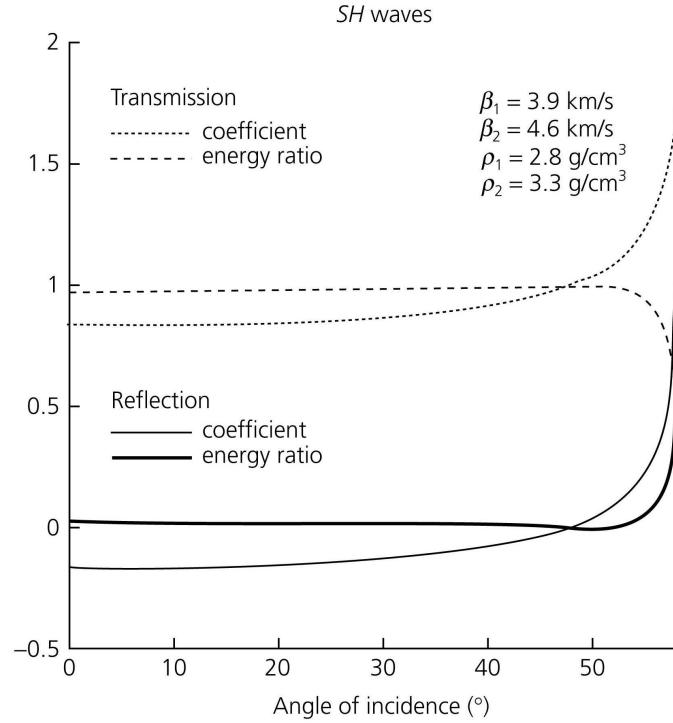


Figura 36: Para una onda SH incidente en una interfaz sólido-sólido, los coeficientes de reflexión y transmisión y las razones de flujo de energía reflejada y transmitida con respecto una onda incidente son función del ángulo de incidencia de la onda incidente. El ángulo crítico para estos valores es 58 deg. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

dencia del ángulo, considere una interfaz entre medios con $\beta_1 = 3.9 \text{ km/s}$, $\rho_1 = 2.8 \text{ g/cm}^3$, y $\beta_2 = 4.5 \text{ km/s}$, $\rho_2 = 3.3 \text{ g/cm}^3$, que aproxima a la discontinuidad continental del Moho. La Fig. 36 muestra los coeficientes de reflexión y transmisión y las razones del flujo de energía para ángulos de incidencia entre la vertical y el crítico (58 deg). Las razones de flujo de energía suman uno, de modo que conforme la energía reflejada aumenta, la energía transmitida disminuye. A una incidencia vertical y para la mayoría de los ángulos menores al crítico, la mayor parte de la energía es transmitida. En este

rango, los coeficientes de reflexión y transmisión de incidencia vertical y las razones de flujo de energía son buenas aproximaciones para incidencia no vertical. El comportamiento cercano al ángulo crítico ilustra el valor de considerar las energías tanto como los coeficientes de reflexión y transmisión. Cuando el ángulo de incidencia se aproxima al valor crítico, el coeficiente de transmisión se dirige a 2, pero el factor del frente de onda $\cos j_2$ tiende a cero, tal que la energía en la onda transmitida se desvanece y toda la energía es reflejada.

2.13. Ondas SH postcríticas

Las ondas transmitidas y reflejadas se comportan diferente para ángulos de incidencia mayor que el ángulo crítico. La ley de Snell,

$$c_x = \beta_1 / \sin j_1 = \beta_2 / \sin j_2, \quad (2.83)$$

muestra que para ángulos de incidencia menores que el ángulo crítico, la velocidad aparente excede la velocidad del segundo medio, β_2 . A una incidencia crítica, $\sin j_2 = 1$, de modo que la velocidad aparente iguala a β_2 . Para ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico, $\sin j_1 > \sin j_c$, de modo que la velocidad aparente $c_x = \beta_1 / \sin j_1$ es menor que $\beta_1 / \sin j_c = \beta_2$.

Para observar el efecto en la onda transmitida con una velocidad aparente menor que la del medio 2, recuerde que la onda transmitida (ec. (2.68)) está descrita por

$$u_y^+(x, z, t) = B' \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta_2} z)). \quad (2.84)$$

Si $c_x < \beta_2$, la constante de proporcionalidad

$$r_{\beta_2} = (c_x^2 / \beta_2^2 - 1)^{1/2}, \quad (2.85)$$

se vuelve un número imaginario. Como resultado, $k_x r_{\beta_2}$, el componente z del número de onda se vuelve imaginario, de modo que la ec. (2.84) ya no describe a una onda plana que se propaga en la dirección $z+$. La raíz cuadrada que describe el número imaginario tiene dos posibles signos. Se elige el signo negativo y se define

$$r_{\beta_2} = -ir_{\beta_2}^*, \quad r_{\beta_2}^* = (1 - c_x^2 / \beta_2^2)^{1/2}, \quad (2.86)$$

tal que el término z del desplazamiento,

$$\exp(-ik_x r_{\beta_2} z) = \exp(-k_x r_{\beta_2}^* z), \quad (2.87)$$

decae exponencialmente conforme uno se aleja de la interfaz en el medio 2. Por lo que, en lugar de tener una onda que se propaga, la onda transmitida se vuelve una onda *evanescente* o *inhomogénea* “atrapada” cerca de la interfaz. Eligiendo el signo negativo en la ec. (2.86), el coeficiente de reflexión puede escribirse como

$$R_{12} = \frac{\mu_1 r_{\beta_1} + i\mu_2 r_{\beta_2}^*}{\mu_1 r_{\beta_1} - i\mu_2 r_{\beta_2}^*}. \quad (2.88)$$

Este es un número complejo dividido por su conjugado, tal que la magnitud del coeficiente de reflexión es 1, pero existe un desplazamiento de la fase de 2ε

$$R_{12} = \exp^{i2\varepsilon}, \quad \varepsilon = \tan^{-1} \frac{\mu_2 \gamma_{\beta_2}^*}{\mu_1 \gamma_{\beta_1}}. \quad (2.89)$$

El cambio de fase dependen del ángulo de incidencia. A una incidencia crítica, $c_x = \beta_2$, de modo que $r_{\beta_2}^* = 0$ y $\varepsilon = 0$ deg. Conforme el ángulo de incidencia se incrementa por arriba del crítico, ε se incrementa hasta tener la incidencia $j_1 = 90$ deg, donde $c_x = \beta_1$, $r_{\beta_1} = 0$, y $\varepsilon = 90$ deg. Un cambio de fase de 90 deg convierte a una onda seno en una onda coseno, y viceversa, mientras que un cambio de fase de 180 deg es una multiplicación por -1 . Si la onda incidente está compuesta de diferentes frecuencias, el cambio de fase afecta a cada frecuencia, de modo que la onda reflejada puede ser calculada usando la transformada de Fourier. La Fig. (37) ilustra como la onda reflejada podría aparecer debido a diferentes cambios de fase.

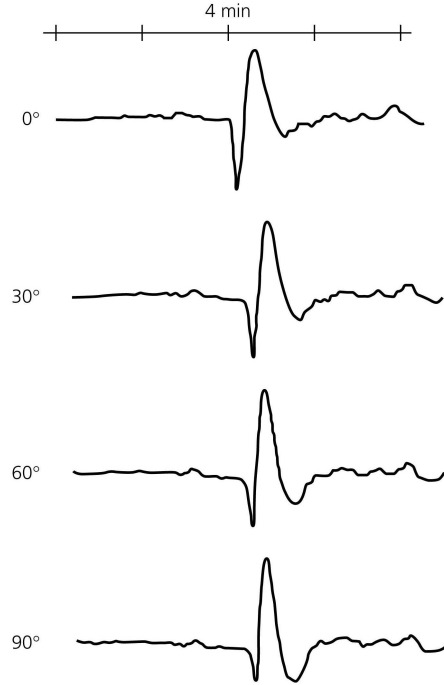


Figura 37: El efecto del cambio de fase en forma de onda sísmica mostrada en la traza superior. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

2.14. Ondas $P - SV$ en la superficie libre

Determinar las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas es más complicada para el sistema $P - SV$ porque las ondas se convierten de un tipo a otro. Para ilustrar

esto considere el caso simple de una onda armónica P que incide en una superficie libre y genera dos ondas reflejadas una P y otra SV (Fig. 38). Para determinar sus amplitudes, se usan los potenciales para ambos tipos de onda, en contraste con el caso SH , donde se usaron los desplazamientos directamente, y se encontrarán soluciones que satisfagan las condiciones de frontera de superficie libre.

Existen dos términos de potenciales escalares, uno para la onda P incidente que sube

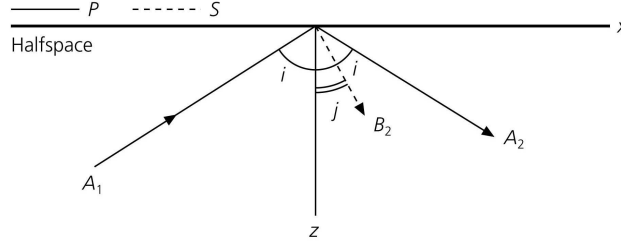


Figura 38: Geometría de una onda P en un semi-espacio que incide en la superficie libre. A_1 , A_2 y B_2 son las amplitudes de las ondas P incidente, P reflejada y SV reflejada respectivamente. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

y otro para la onda P reflejada que baja

$$\begin{aligned} \phi_I(x, z, t) + \phi_R(x, z, t) = & A_1 \exp(i(\omega t - k_x x + k_x r_\alpha z)) \\ & + A_2 \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_\alpha z)). \end{aligned} \quad (2.90)$$

La onda SV reflejada que baja con amplitud B_2 es descrita por un potencial vectorial con componente y

$$\Psi_R(x, z, t) = B_2 \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_\beta z)). \quad (2.91)$$

Usando la ec. (2.91), los dos componentes del desplazamiento diferentes de cero están dado por una combinación de los potenciales P y SV

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2.92)$$

En la superficie libre, el vector de tracción, y por lo tanto los componentes del tensor de esfuerzos σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} deben ser cero para todo x y t . σ_{yz} es cero automáticamente para ondas $P - SV$ en esta geometría. Usando la ec. (2.92), se expresan los otros dos componentes del tensor en términos de los potenciales

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= 2\mu e_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_{zz} &= \lambda \theta + 2\mu e_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Después se sustituyen los potenciales de las ecs. (2.90) y (2.91) en la ec. (2.93) y se evalúan en $z = 0$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}(x, 0, t) &= 0 \\
&= \mu[2r_\alpha(A_1 - A_2) + (r_\beta^2 - 1)B_2]k_x^2 \exp(i(\omega t - k_x x)) \\
\sigma_{zz}(x, 0, t) &= 0 \\
&= -[\lambda(1 + r_\alpha^2)(A_1 + A_2) + 2\mu(r_\alpha^2(A_1 + A_2) \\
&\quad + r_\beta B_2)]k_x^2 \exp(i(\omega t - k_x x)).
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Reagrupando términos se demuestra que la razón de las amplitudes de la ondas P y SV reflejadas con respecto a la onda P incidente puede encontrarse resolviendo las ecuaciones

$$2r_\alpha \frac{A_2}{A_1} + (1 - r_\beta^2) \frac{B_2}{A_1} = 2r_\alpha, \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}
((\lambda + 2\mu)(1 + r_\alpha^2) - 2\mu) \frac{A_2}{A_1} \\
+ 2\mu r_\beta \frac{B_2}{A_1} &= 2\mu - (\lambda + 2\mu)(1 + r_\alpha^2).
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Como $(1 + r_\alpha^2) = (c_x^2/\alpha^2) = c_x^2\rho/(\lambda + 2\mu)$, la última ecuación puede simplificarse a

$$(c_x^2\rho - 2\mu) \frac{A_2}{A_1} + 2\mu r_\beta \frac{B_2}{A_1} = 2\mu - c_x^2\rho. \tag{2.97}$$

Resolviendo las ecs. (2.95) y (2.96) usando $(1 + r_\beta^2) = (c_x^2/\beta^2) = c_x^2\rho/\mu$ se obtienen las razones de amplitudes

$$\begin{aligned}
R_P &= \frac{A_2}{A_1} = \frac{4r_\alpha r_\beta - (r_\beta^2 - 1)^2}{4r_\alpha r_\beta + (r_\beta^2 - 1)^2}, \\
R_{SV} &= \frac{B_2}{A_1} = \frac{4r_\alpha(1 - r_\beta^2)}{4r_\alpha r_\beta + (r_\beta^2 - 1)^2}.
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Estas ecs. pueden escribirse en muchas formas, incluyendo

$$\begin{aligned}
R_P &= \frac{A_2}{A_1} = \frac{4p^2\eta_\alpha\eta_\beta - (\eta_\beta^2 - p^2)^2}{4p^2\eta_\alpha\eta_\beta + (\eta_\beta^2 - p^2)^2}, \\
R_{SV} &= \frac{B_2}{A_1} = \frac{4p\eta_\alpha(p^2 - \eta_\beta^2)}{4p^2\eta_\alpha\eta_\beta + (\eta_\beta^2 - p^2)^2}.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Esta última forma tiene la ventaja de que para una incidencia vertical la lentitud vertical es $\eta_\alpha = 1/\alpha$ y $\eta_\beta = 1/\beta$, mientras que r_α y r_β son infinitos.

Estas razones de amplitudes son los coeficientes de reflexión para los potenciales P y SV . En general, se tienen tanto ondas P como SV reflejadas. Para una incidencia vertical el parámetro de rayo p es cero, y la ec. (2.99) muestra dos interesantes características. Primero, no hay onda P incidente que se convierta en energía SV reflejada

($B_2 = 0$). Segundo, la onda P reflejada es invertida porque $A_2/A_1 = -1$. Estos efectos también ocurren a una incidencia con $i = 90^\circ$ porque $\eta_\alpha = 0$.

Las razones de los desplazamientos para la onda P incidente y las ondas P y SV reflejadas pueden encontrarse a partir de los potenciales usando la ec. (2.92)

$$\begin{aligned} P \text{ incidente} & \quad (u_x, u_z)_{PI} = (-ik_x, ik_x r_\alpha) \phi_I \\ P \text{ reflejada} & \quad (u_x, u_z)_{PR} = (-ik_x, -ik_x r_\alpha) \phi_R \\ SV \text{ reflejada} & \quad (u_x, u_z)_{SR} = (ik_x r_\beta, -ik_x) \Psi_R. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Como los desplazamientos son número reales, estos pueden ser encontrados al tomar la parte real de las expresiones complejas.

Usando estas expresiones, la amplitud de cualquier componente del desplazamiento puede ser encontrado del potencial de reflexión y los coeficientes de transmisión. De modo que las razones de los desplazamientos pueden diferir de signo o por un factor de escala de los coeficientes de los potenciales de reflexión y transmisión. Para notar esto, considere las razones de las magnitudes de los desplazamientos. Como los componentes de los vectores de onda para ondas P y SV satisfacen

$$k_\alpha = [k_x^2 + (k_x r_\alpha)^2]^{1/2} = \omega/\alpha, \quad k_\beta = [k_x^2 + (k_x r_\beta)^2]^{1/2} = \omega/\beta, \quad (2.101)$$

la razón de las magnitudes de los desplazamientos de las ondas P reflejada e incidente es

$$\frac{|u|_{PR}}{|u|_{PI}} = \frac{k_\alpha |\phi_R|}{k_\alpha |\phi_I|} = \frac{|A_2|}{|A_1|}, \quad (2.102)$$

y la razón de las magnitudes de los desplazamientos de las ondas SV reflejada y de la onda P incidente es

$$\frac{|u|_{SR}}{|u|_{PI}} = \frac{k_\beta |\Psi_R|}{k_\alpha |\phi_I|} = \frac{\alpha |B_2|}{\beta |A_1|}. \quad (2.103)$$

Se puede ganar mayor intuición al considerar como la energía de la onda incidente se particiona entre las dos ondas reflejadas. De la ec. (2.66), una onda armónica plana P tiene un flujo de energía en la dirección de propagación

$$\dot{E} = A^2 \omega^2 k_\alpha^2 \rho \alpha / 2, \quad (2.104)$$

y un resultado similar aplica para una onda SV . Las longitudes de los frentes de onda que contribuyen al flujo en un elemento dx de la superficie libre (Fig. 39) son $\cos i dx$ para las ondas P y $\cos j dx$ para la onda SV . Por lo tanto, los flujos de energía de las ondas P incidente y reflejada y de la onda SV reflejada son:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{PI} &= A_1^2 \omega^2 k_\alpha^2 \rho \alpha \cos i dx / 2 \\ \dot{E}_{PR} &= A_2^2 \omega^2 k_\alpha^2 \rho \alpha \cos i dx / 2 \\ \dot{E}_{SR} &= B_2^2 \omega^2 k_\beta^2 \rho \beta \cos j dx / 2, \end{aligned} \quad (2.105)$$

tal que las razones de los flujos de energía reflejados con respecto al flujo de energía incidente son

$$\frac{\dot{E}_{PR}}{\dot{E}_{PI}} = \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \quad \frac{\dot{E}_{SR}}{\dot{E}_{PI}} = \left(\frac{B_2}{A_1} \right)^2 \frac{\alpha \cos j}{\beta \cos i} = \left(\frac{B_2}{A_1} \right)^2 \frac{\eta_\beta}{\eta_\alpha}. \quad (2.106)$$

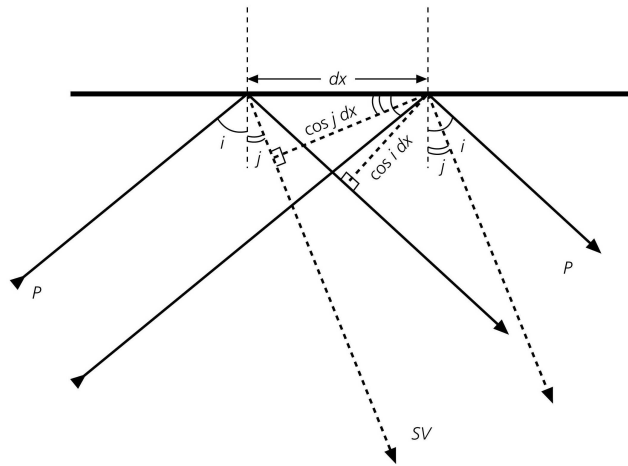


Figura 39: Las longitudes de los frentes de onda incidentes y reflejados que contribuyen al flujo de energía en un elemento dx de la superficie libre dependen del coseno de los ángulos de incidencia de cada onda. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

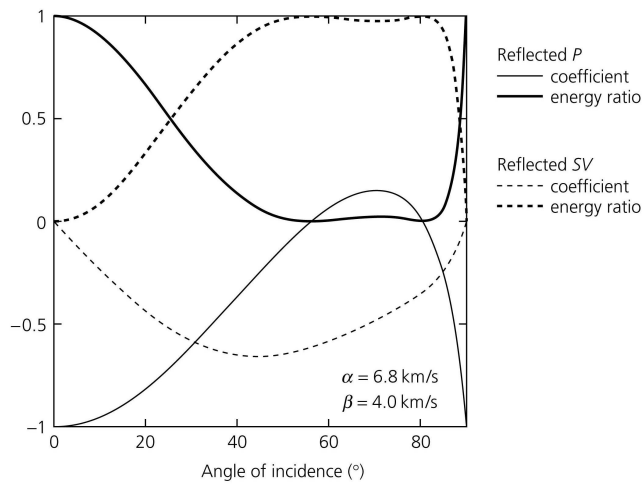


Figura 40: Coeficientes de reflexión y razones de flujo de energía de una onda P incidente en una superficie libre. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

Como la energía no se acumula en la superficie libre, la suma de las razones debe sumar 1.

La Fig. 40 muestra un ejemplo de los coeficientes de reflexión y de las razones de flujo de energía como función del ángulo de incidencia de una onda P incidente. A pesar de no haber onda SV reflejada en los límites, incidencia vertical y horizontal, existe un amplio rango de ángulos sobre el cual la mayor parte de la energía se refleja como SV .

Hay dos ángulos en los cuales la onda P incidente se convierte totalmente en una onda SV .

2.15. Interfaces sólido-sólido y sólido-líquido

La aproximación usada para ondas $P-SV$ en la superficie libre puede ser extendida para una interfaz sólido-sólido. Considere la geometría usual (Fig. 41) en donde las ondas $P-SV$ se propagan en el plano $x-z$ e interactúan con una interfaz horizontal en $z = 0$. Una onda incidente genera dos ondas reflejadas y dos ondas transmitidas. Las cuatro razones de las amplitudes de las ondas P y SV reflejadas y P y SV transmitidas con respecto a la onda incidente son encontradas a partir de las condiciones de frontera. Existen cuatro ecuaciones porque los componentes x y z de los desplazamientos y las tracciones son continuos en la interfaz. Las respectivas soluciones son complicadas y no se verán aquí. En su lugar, se considerará algunos principios generales y ejemplos. Las soluciones son simples para una incidencia vertical. Para una P incidente vertical,

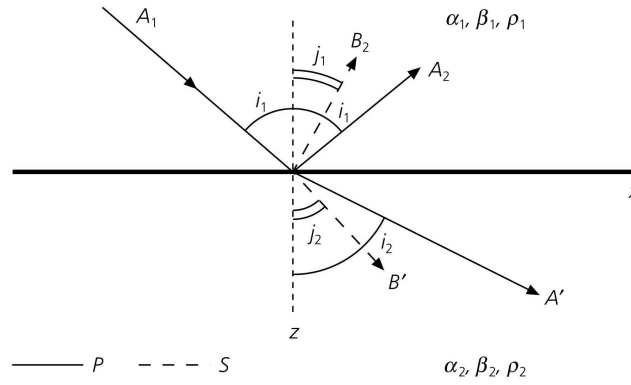


Figura 41: Geometría de una onda P incidente en una interfaz sólido-sólido. A_1 , A_2 , B_2 , A' y B' son las amplitudes de las ondas P incidente, P y SV reflejadas y P y SV transmitidas. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

no se generan ondas SV . El desplazamiento es únicamente en la dirección z , y la razón del desplazamiento de la onda P transmitida con respecto a la onda incidente es

$$\frac{(u_z)_T}{(u_z)_I} = T_{12} = \frac{2\rho_1\alpha_1}{\rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_2}. \quad (2.107)$$

La razón correspondiente a la onda P reflejada es

$$\frac{(u_z)_R}{(u_z)_I} = R_{12} = \frac{\rho_1\alpha_1 - \rho_2\alpha_2}{\rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_2}. \quad (2.108)$$

Estas razones, los coeficientes de transmisión y reflexión verticales de los desplazamientos, satisfacen $1 + R_{12} = T_{12}$ por la continuidad de los desplazamientos. Como en el caso SH (Sección 2.11), los coeficientes de transmisión y reflexión verticales

dependen únicamente de las impedancias acústicas. Para el caso SV incidente, no se generan ondas P y las razones del componente u_x del desplazamiento tiene la misma forma pero en términos de la velocidad de corte β .

La Fig. 42 ilustra un efecto intrigante que ocurre para una onda P incidente vertical en

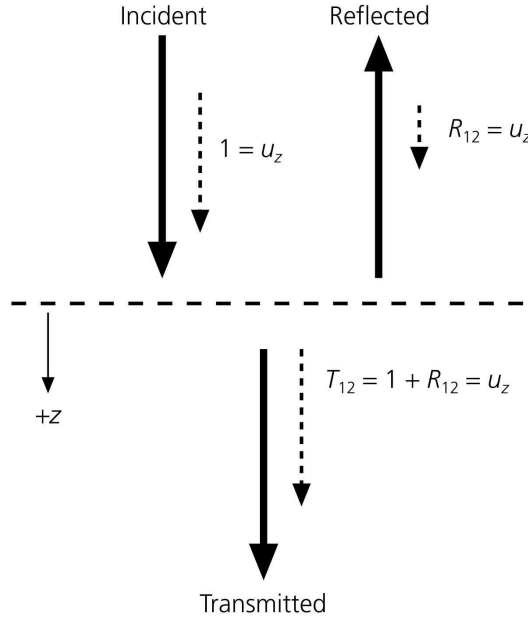


Figura 42: Direcciones de propagación (línea sólida) y amplitudes de los deslizamientos (líneas discontinuas) para ondas P incidentes, reflejadas y transmitidas en una interfaz sólido-sólido. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

una interfaz donde $\rho_1 \alpha_1 > \rho_2 \alpha_2$, tal que R_{12} es positivo. Si la incidencia P es un pulso en la dirección $z+$ de propagación con amplitud unitaria, entonces la onda P reflejada es un pulso con amplitud R_{12} en la dirección $z+$. Por lo tanto el movimiento en la onda incidente es en esa dirección de propagación ($+z$), mientras que el movimiento en la onda reflejada es opuesto a la dirección de propagación ($-z$). El movimiento en la onda P es llamado *compresional* si este es en la dirección de propagación y *dilatacional* si este es opuesto a la dirección de propagación. Tal que una onda P con un movimiento compresional conduce a una reflexión con movimiento dilatacional. Algunas veces la amplitud positiva del movimiento para una onda P se define en la dirección de propagación, tal que el coeficiente de reflexión es definido con el signo opuesto de la ec. (2.108).

Las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas varían con el ángulo de incidencia y la energía se particiona entre las cuatro ondas. La Fig. 43 muestra un ejemplo con velocidades y densidades que aproximan la discontinuidad continental del Moho. Trayectorias de rayo y razones de flujos de energía para ondas P y SV incidentes son graficadas. Las cuatro razones se encuentran entre 0 y 1 y suman 1 porque la energía

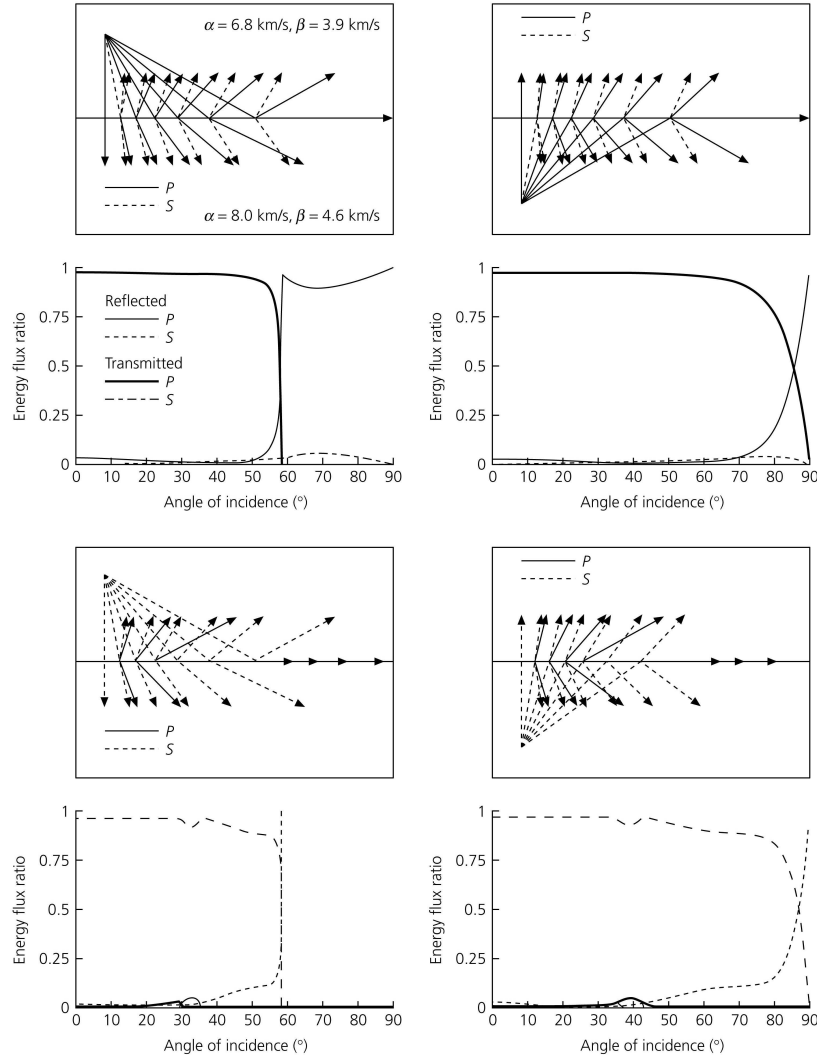


Figura 43: Interacciones en una interfaz sólido-sólido entre medios con $\alpha_1 = 6.8$ km/s, $\beta_1 = 3.9$ km/s, $\rho_1 = 2.8$ g/cm³ y $\alpha_2 = 8.0$ km/s, $\beta_2 = 4.6$ km/s, $\rho_2 = 3.3$ g/cm³. Estos valores corresponden aproximadamente a la corteza continental y al manto en la discontinuidad del Moho. Trayectorias de rayo y razones de flujos de energía reflejada y transmitida con respecto a la onda incidente se muestran como función del ángulo de incidencia para ondas P y SV incidentes. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

se conserva.

Para una onda P incidente vertical desde arriba, la impedancia $\rho_1 \alpha_1 = 19.0$, $\rho_2 \alpha_2 =$

26.4, conduce a los coeficientes de reflexión y transmisión $R_{12} = -0.16$, $T_{12} = 0.84$ y razones de flujo de energía de

$$\frac{\dot{E}_R}{\dot{E}_i} = R_{12}^2 = 0.03, \quad \frac{\dot{E}_T}{\dot{E}_i} = T_{12}^2 \frac{\rho_2 \alpha_2}{\rho_1 \alpha_1} = 0.97. \quad (2.109)$$

Estas razones son una buena aproximación para ángulos de incidencia menores que el ángulo crítico $\sin^{-1}(\alpha_1/\alpha_2) = 58 \text{ deg}$ porque la mayor parte de la energía es transmitida como P . Sin embargo, conforme el ángulo de incidencia se acerca al valor crítico, la energía de la onda P transmitida tiende a cero, y la mayor parte de la energía se refleja como P . Para la mayoría de los ángulos de incidencia postcríticos, arriba del 10 % de la energía se convierte en SV , de la cual aproximadamente la mitad se refleja y la otra mitad se transmite. En el límite de incidencia horizontal, toda la energía es en la onda P reflejada.

Para una onda P incidente desde abajo, la situación es similar excepto de que no existe un ángulo crítico. Para la incidencia vertical, los coeficientes de reflexión y transmisión son $R_{21} = 0.16$, $T_{21} = 1.16$, y las razones de flujo de energía son los mismos que antes, porque

$$\frac{\dot{E}_R}{\dot{E}_i} = R_{21}^2 = 0.03, \quad \frac{\dot{E}_T}{\dot{E}_i} = T_{21}^2 \frac{\rho_1 \alpha_1}{\rho_2 \alpha_2} = 0.97. \quad (2.110)$$

Para ángulos de incidencia grandes, $> 70 \text{ deg}$, la energía se ve incrementada en la onda P reflejada.

El comportamiento de una onda S incidente desde arriba es análogo al de una onda P incidente desde arriba. Para este ejemplo, las impedancias de la onda S son $\rho_1 \beta_1 = 10.9$, $\rho_2 \beta_2 = 15.2$, y los coeficientes de reflexión y transmisión de incidencia vertical son los mismos que para ondas P . Por lo tanto, en una incidencia vertical, casi toda la energía es transmitida como S , poca reflejada como S y no hay conversión a P . Para incidencia cercana a la vertical, $< 20 \text{ deg}$, este patrón cambia lentamente. Para ángulos de incidencia mayores, la situación es más interesante porque existen tres ángulos críticos. Al acercarse al ángulo crítico para la onda P transmitida, $\sin^{-1}(\beta_1/\alpha_2) = 29 \text{ deg}$, la energía P transmitida se incrementa un poco. Por arriba de este ángulo no existe onda P transmitida, pero la onda P reflejada se comporta de forma similar hasta que se desvanece para $\sin^{-1}(\beta_1/\alpha_1) = 35 \text{ deg}$. Para ángulos de incidencia mayores, solamente las ondas S reflejadas y transmitidas existen, y la energía en la onda S transmitida decae a cero en su ángulo crítico $\sin^{-1}(\beta_1/\beta_2) = 58 \text{ deg}$. Por arriba de este ángulo, la incidencia de la onda S padece de reflexión total.

Para el caso final, una onda S incidente desde abajo, es análogo al de una onda P incidente desde abajo. A una incidencia vertical casi toda la energía es transmitida como S , poca reflejada como S y no hay conversión a P . Hay una pequeña onda P reflejada cerca de su ángulo crítico, $\sin^{-1}(\beta_2/\alpha_2) = 35 \text{ deg}$. Aún más notable, es el aumento en amplitud de la onda P transmitida cerca de su ángulo crítico por la conversión de S a P , $\sin^{-1}(\beta_2/\alpha_1) = 42 \text{ deg}$. A mayores ángulos de incidencia, la onda S transmitida disminuye mientras que la onda S reflejada incrementa.

Este ejemplo confirma la complejidad de las interacciones en una interfaz sólido-sólido. El comportamiento depende de las cuatro velocidades y las dos densidades. Una

aproximación útil es que para medios con impedancias similares, la mayor parte de la energía incidente se vuelve energía transmitida del mismo tipo que aquel de la onda incidente (P o S). Esto tiene sentido, porque si los materiales fueran idénticos toda la energía sería transmitida. Para una onda incidente de un medio de baja velocidad, se tiene aproximadamente el mismo comportamiento para ángulos de incidencia menores al ángulo crítico. Para ángulos de incidencia en un medio de mayor velocidad, la mayoría de la energía es transmitida en el mismo tipo de onda hasta casi alcanza una incidencia horizontal. Como la onda incidente no es afectada fuertemente por pequeños cambios de impedancia, las ondas que se propagan a través de la tierra cambian de dirección continuamente de acuerdo a la ley de Snell, pero cambian su amplitud significativamente solo en interfaces donde los contrastes de impedancia son grandes. Si este no fuera el caso, no se podrían diferenciar arribos diferentes.

El procedimiento usado para los coeficientes de reflexión y transmisión en una interfaz sólido-sólido puede ser extendido para el caso de una interfaz sólido-líquido. Como no existen ondas de corte en el líquido, sólo se tienen tres razones de amplitudes. De igual forma como la velocidad de corte y la rigidez del fluido son cero, existen tres condiciones de frontera en la interfaz: continuidad del desplazamiento y tracción vertical y tracción de corte en el sólido nula.

La Fig. 44 muestra los tres posibles casos en el fondo oceánico: ondas P que inciden

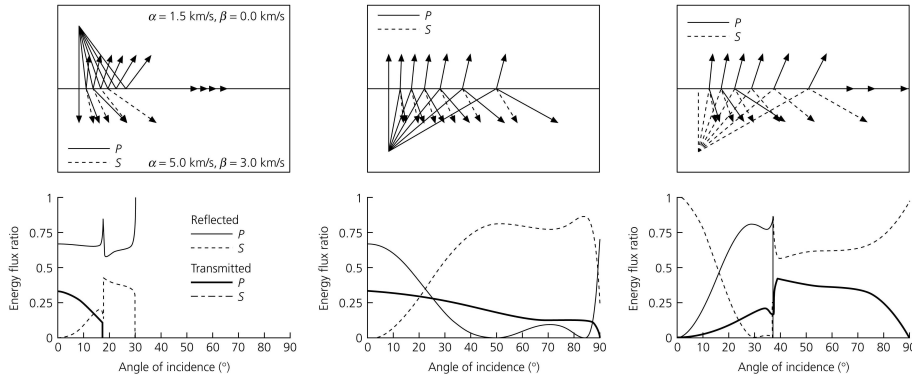


Figura 44: Trayectorias de rayo y razones de flujo de energía para una interfaz entre el océano, con $\alpha_1 = 1.5$ km/s, $\beta_1 = 0.0$ km/s, $\rho_1 = 1$ g/cm³, y la corteza con $\alpha_2 = 5.0$ km/s, $\beta_2 = 3.0$ km/s, $\rho_2 = 3.0$ g/cm³. Se muestran tres casos, onda P incidente desde arriba y ondas P y SV que inciden desde abajo. Imagen tomada de Stein y Wyss (2003).

desde arriba y ondas P y SV que inciden desde abajo. Debido a que el contraste de impedancia en el fondo oceánico es mayor que en el ejemplo de la discontinuidad del Moho, las amplitudes relativas de las ondas reflejadas y transmitidas son bastante diferentes de aquellas mostradas en la Fig. 44. Primero, considere una onda P incidente desde arriba. A una incidencia vertical, $R_{12} = -0.82$, $T_{12} = 0.18$, de modo que dos tercios de la energía incidente se refleja y sólo un tercio es transmitido. Conforme el ángulo de incidencia se incrementa, la fracción de la energía reflejada permanece apro-

ximadamente igual, pero la onda S transmitida crece a expensas de la onda P transmitida. El primer ángulo crítico ocurre para la P transmitida en $\sin^{-1}(\alpha_1/\alpha_2) = 17^\circ$. Por arriba de este ángulo, se presenta una onda S transmitida significativa hasta el ángulo crítico de la conversión de P a S en $\sin^{-1}(\alpha_1/\beta_2) = 30^\circ$. Para ángulos de incidencia mayores, la onda P incidente es reflejada en su totalidad.

La comparación de este caso con el de la onda P incidente desde arriba en el ejemplo

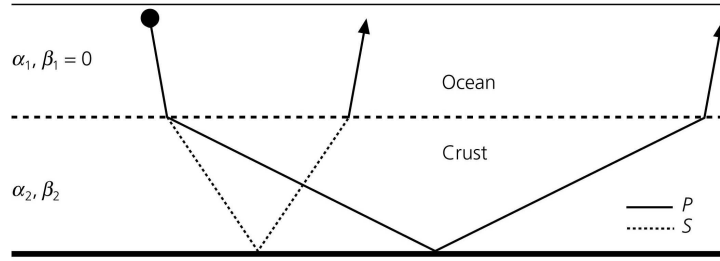


Figura 45: Ilustración esquemática de un experimento de sismica marina, en donde una onda P generada en el agua se convierte en ondas P y S en la corteza. La onda S que sube en la corteza se convierte parcialmente en onda P en el fondo oceánico. A pesar de que las ondas S no viajan a través del agua, el experimento puede determinar las propiedades de la onda S en la corteza. No todas las ondas reflejadas y transmitidas son mostradas. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

del Moho (Fig. 43) muestra varias diferencias. En ambos ejemplos las ondas P inciden en un medio de mayor velocidad. Como el contraste de impedancias en el fondo oceánico es mucho mayor, la mayor de la energía se refleja a una incidencia vertical, y esta situación persiste para todos los ángulos de incidencia. Por el contrario, para el ejemplo del Moho, la mayor parte de la energía es transmitida hasta el ángulo crítico. El ángulo crítico de la onda P transmitida ocurre antes en el fondo oceánico porque el contraste de la velocidad de las ondas P es mucho mayor. El comportamiento de la onda S transmitida es muy diferente en los dos ejemplos: $\alpha_1 > \beta_2$ para el Moho de modo que no hay ángulo crítico para la onda S transmitida. Por el contrario, en el fondo oceánico una porción significativa de la energía incidente es convertida y transmitida para ángulos menores que el ángulo crítico de la onda S transmitida.

Los resultados para ondas incidentes desde abajo también difieren significativamente entre los dos ejemplos. Una onda P incidente en el fondo oceánico desde abajo es en su mayoría reflejada, en su mayoría como onda P para ángulos menores que 20° , en su mayoría como onda S para ángulos mayores que 30° . Menos de un tercio de la energía es transmitida. En contraste con el ejemplo del Moho donde casi toda la energía de la onda P incidente es transmitida hasta cuando se alcanza incidencia horizontal. Para una onda S incidente desde abajo, toda la energía es reflejada como una onda S vertical, porque no hay transmisión de onda S en el agua. Para pequeños ángulos de incidencia, la fracción de la onda P reflejada se incrementa hasta alcanzar el ángulo crítico $\sin^{-1}(\beta_2/\alpha_2) = 37^\circ$. Para la mayoría de los ángulos de incidencia, una porción significativa de la onda S que sube se convierte en una onda P transmi-

da. Esta fuerte conversión no ocurre en el ejemplo del Moho. El hecho de que ondas P incidentes desde el agua originan ondas S significativas en la corteza y de que ondas S incidentes desde la corteza conducen a ondas P significativas en el agua tienen importantes consecuencias para sismica marina. Fuentes sísmicas en el agua pueden generar ondas S transmitidas en la corteza, cuya propagación puede ser estudiada usando las ondas P reconvertidas en el fondo oceánico de las ondas S que suben. Por lo tanto la corteza oceánica y el manto superior pueden ser estudiados tanto con ondas P como S , usando fuentes que general solo ondas P y receptores que detectan únicamente ondas P .

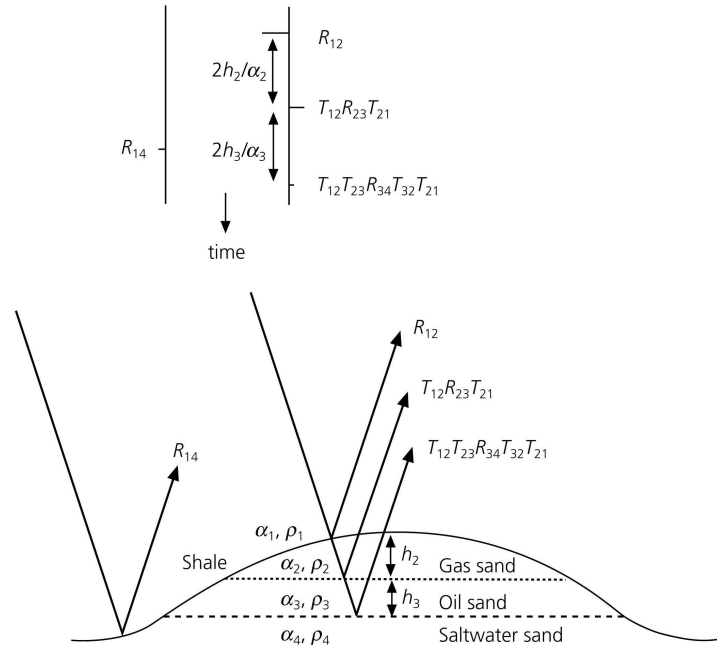


Figura 46: Ilustración esquemática de un experimento de sismica de reflexión, en donde las ondas con incidencia vertical se reflejan de una región con una estructura de velocidad variable. Las trayectorias de rayo verticales están desplazadas por claridad. Los medios tienen $\alpha_1 = 2.6$ km/s, $\rho_1 = 2.5$ g/cm³, $\alpha_2 = 1.7$ km/s, $\rho_2 = 2.0$ g/cm³, $\alpha_3 = 2.2$ km/s, $\rho_3 = 2.2$ g/cm³, $\alpha_4 = 2.3$ km/s, $\rho_4 = 2.3$ g/cm³. Sismogramas impulso muestran los arribos que resultan de un pulso de onda P de amplitud unitaria y están graficados con el tiempo incrementándose hacia abajo. Los arribos resultantes tienen amplitudes $R_{12} = 0.3$, $T_{12}R_{23}T_{21} = -0.2$, $T_{12}T_{23}R_{34}T_{32}T_{21} = -0.02$, y están separados por el tiempo que les lleva atravesar las capas. La correspondiente reflexión de un punto a un lado de la región tiene amplitud $R_{14} = 0.1$. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

2.16. Ejemplo

Usando las amplitudes de las ondas reflejadas, convertidas y transmitidas para estudiar las interfaces es común en sismología. En sismología de reflexión, ondas P generadas por fuentes cercanas a la superficie y reflejadas en las interfaces en profundidad son usadas para estudiar la corteza y el manto superior. Usualmente cuando las ondas que bajan e impactan en los reflectores con ángulos cercanos a la vertical, los datos pueden procesarse simulando una incidencia vertical. Como los contrastes de impedancias son pequeños, es común desprestigiar las conversiones P a S y estimar las amplitudes de las ondas P reflejadas y transmitidas usando coeficientes de reflexión y transmisión de incidencia vertical. Los coeficientes de reflexión y transmisión inferidos de los datos sísmicos son combinados con los tiempos de viaje para obtener información de la geología del subsuelo. Considere (Fig. 46) una región hipotética donde gas natural, aceite y salmuera están atrapados en los poros de una trampa geológica. Para describir la respuesta de esta región a un pulso de onda P de unidad unitaria, considere primero la reflexión (*primaria*) de cada una de las capas, porque las reflexiones *múltiples* subsecuentes serán más pequeñas. Los arribos resultantes tienen amplitudes R_{12} , $T_{12}R_{23}T_{21}$ y $T_{12}T_{23}R_{34}T_{32}T_{21}$, y están separados por el tiempo que les lleva atravesar las capas. Por el contrario, la reflexión correspondiente de un punto a un lado de esa región tendría una amplitud R_{14} . Las variaciones laterales en el contraste de impedancia originan una diferencia significativa en la amplitud de las ondas reflejadas.

3. Ondas superficiales (Rayleigh y Love)

Objetivo: El alumno comprenderá la naturaleza de las ondas superficiales y será capaz de describir matemáticamente estas ondas.

3.1. Introducción

Después de la discusión sobre ondas P y S , se esperaría que los sismogramas resultantes de un terremoto consistiría de pulsos cuando las ondas P y S llegan, con arribos tardíos reflejados y convertidos en las interfaces dentro de la Tierra. Sin embargo, generalmente, los sismogramas están dominados por ondas de periodos más grandes que llegan después que las ondas P y S . Estas ondas son *ondas superficiales* cuya energía está concentrada cerca de la superficie de la Tierra. Como resultado de la dispersión geométrica, su energía se difunde en dos dimensiones y decae a una distancia r de la fuente aproximadamente como r^{-1} , mientras que la energía de las ondas de cuerpo se difunde en tres dimensiones y decae aproximadamente como r^{-2} . Por lo tanto, para distancias grandes de la fuente, las ondas de superficie son predominantes en los sismogramas.

Existen dos tipos de ondas superficiales, llamadas *ondas Love* y *ondas Rayleigh* nombradas así por quienes las descubrieron¹⁶, que viajan cerca de la superficie de la Tierra.

¹⁶Lord Rayleigh (1849 – 1919), mejor conocido entre los sismólogos por su trabajo pionero en la propagación de ondas, fué laureado con un premio Nobel por su descubrimiento del argón.

A.E.H. Love (1863 – 1940) hizo contribuciones fundamentales tanto en sismología como en geodinámica.

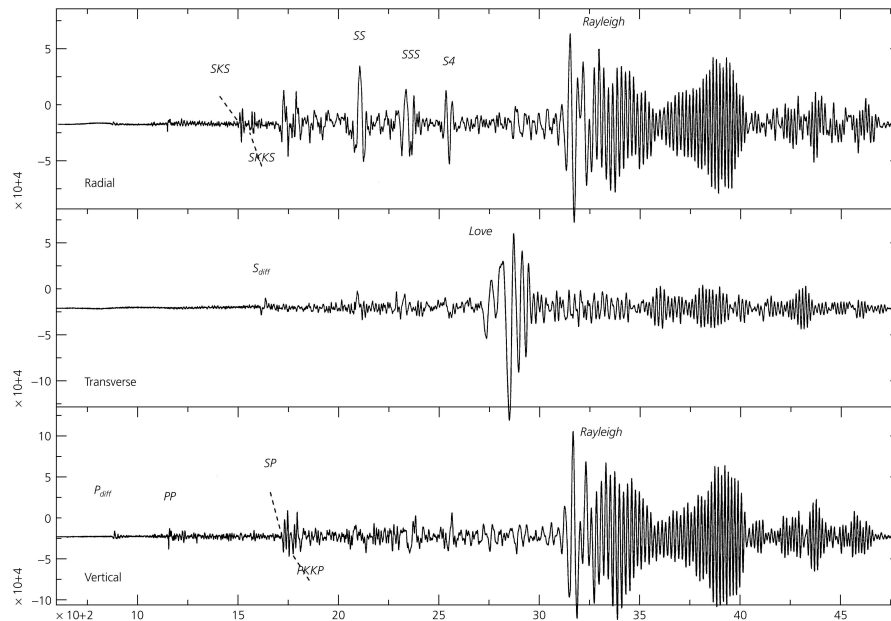


Figura 47: Sismograma de tres componentes de un terremoto poco profundo de magnitud M_w 7.7 ocurrido en la trinchera Vanuatu registrado a 12,250 km en la estación CCM. Note la amplitud de las ondas de superficie comparadas con las ondas de cuerpo precedentes. La onda de Love es observada en el componente transversal y la onda de Rayleigh es observada en los componentes vertical y radial. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

La Fig. 47 muestra trenes de ondas de superficie grandes que arriban en el componente transversal de un sismómetro, seguido por otro grupo de ondas en los componentes vertical y radial. Se verá que el primer tren de onda contiene ondas Love que resultan de ondas SH atrapadas cerca de la superficie. El segundo grupo de ondas contiene ondas Rayleigh, que son una combinación de desplazamientos P y SV . En la geometría usual (Fig. 48) de ondas que se propagan en el plano $x - z$, el desplazamiento de las ondas Rayleigh están en ese plano, y el desplazamiento de las ondas Love son paralelos al eje y . En esta sección, se examinan los casos más simples de ondas Rayleigh y Love, y se usarán para demostrar algunas ideas generales acerca de las ondas superficiales.

Una diferencia interesante entre las ondas de superficie y las ondas de cuerpo, debido a sus diferentes tasas de decaimiento, es que las ondas superficiales puede circular el globo terráqueo muchas veces después de un gran terremoto. La Fig. 49 muestra estas múltiples ondas superficiales, que están denotadas como ondas Rayleigh (R_n) y ondas Love (G_n). La gráfica de tiempos de arribo (Fig. 49, izquierda) ilustra el tiempo requerido por las trayectorias sucesivas, indizadas por n , del terremoto a la estación. Una importante característica de las ondas superficiales es la *dispersión*, el hecho de que ondas de diferentes periodos viajen a diferentes velocidades. Como resultado, los

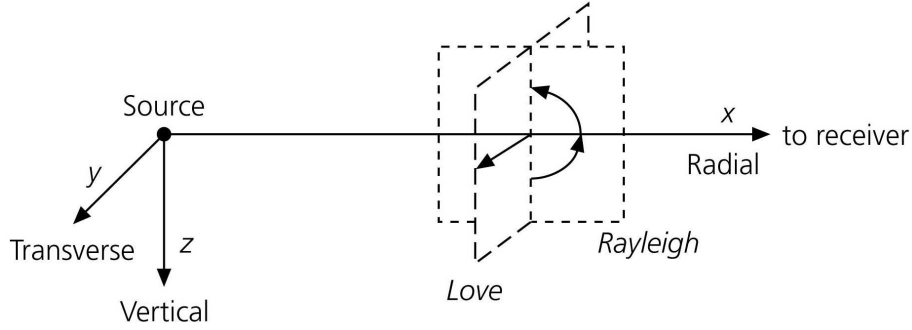


Figura 48: Geometría de ondas de superficie que se propagan en un plano vertical que contiene a la fuente y al receptor. Las ondas Rayleigh ($P - SV$) aparecen en los componentes vertical y radial. Las ondas Love (SH) aparecen en el componente transversal. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

arribos de ondas superficiales no son líneas finas, sino se dispersan en el tiempo. Estos ejemplos son mostrados en la Fig. 50 por una sección grabada compuesta de los componentes verticales de muchos sismogramas a diferentes distancias de los terremotos, que permiten la construcción de una gráfica del tiempo de viaje. Los datos muestran los arribos de R_1 , R_2 , R_3 y R_4 .

3.2. Ondas Rayleigh en un semi-espacio homogéneo

Las ondas Rayleigh son una combinación de ondas P y SV que pueden existir en la cima de un semi-espacio homogéneo. Para describirlas, se define la superficie libre en $z = 0$, con z creciente hacia abajo, y se usan los potenciales de ondas que se propagan en el plano $x - z$. Se consideran solamente ondas P y SV , porque estas satisfacen las condiciones de superficie libre sin interactuar con ondas SH . Los potenciales P y SV son

$$\begin{aligned}\phi &= A \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_\alpha z)) \\ \Psi &= B \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_\beta z)).\end{aligned}\quad (3.1)$$

Para tener una combinación de estos potenciales que describan la energía atrapada en la superficie libre, dos condiciones se deben aplicar. La solución debe asegurar que la energía no se propaga lejos de la superficie y satisfacer las condiciones de superficie libre.

Para que la energía quede atrapada cerca de la superficie, los exponenciales $\exp(-ik_x r_\alpha z)$ y $\exp(-ik_x r_\beta z)$ deben tener exponentes negativos reales, tal que el desplazamiento decaiga conforme $z \rightarrow \infty$. Como

$$r_\alpha = (c_x^2/\alpha^2 - 1)^{1/2} \quad r_\beta = (c_x^2/\beta^2 - 1)^{1/2}, \quad (3.2)$$

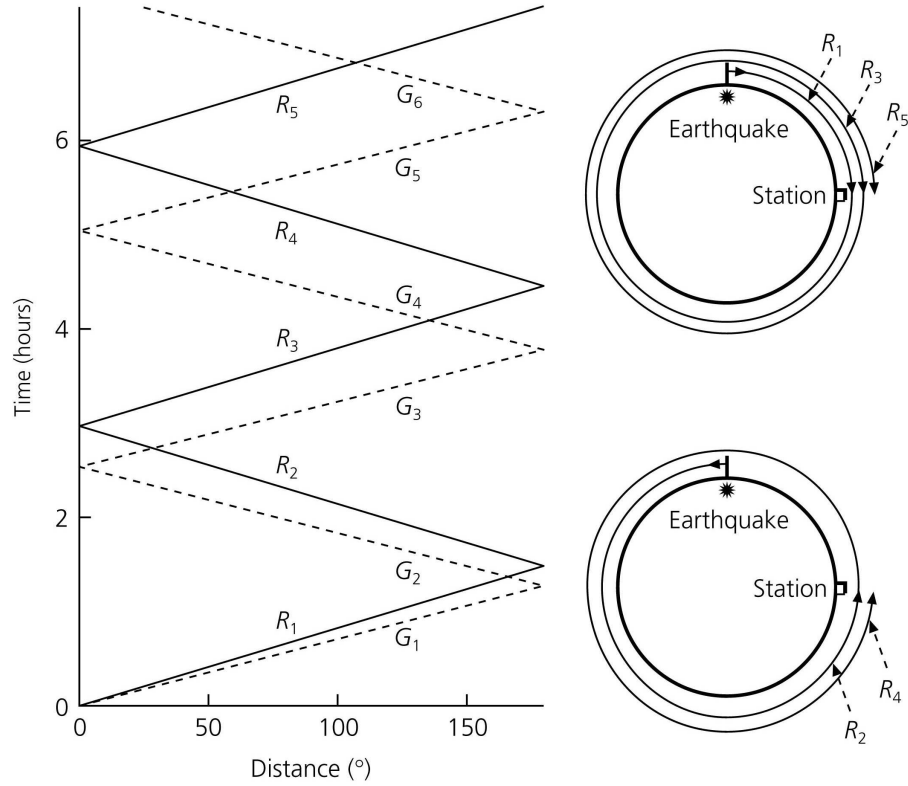


Figura 49: Múltiples ondas superficiales circulan la Tierra. *Derecha*: Arribos con números impares (R_1, R_3 , etc.) toman la trayectoria más cercana del terremoto a la estación, mientras que arribos con números pares (R_2, R_4 , etc.) viajan en la dirección opuesta. *Izquierda*: Tiempos de arribo para múltiples ondas Rayleigh (R_n) y Love (G_n). Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

esta condición de radiación requiere que $c_x < \beta < \alpha$, tal que ambas raíces cuadradas se vuelven imaginarias y eligiendo la raíz negativa, pueden escribirse como

$$r_\alpha = -i(1 - c_x^2/\alpha^2)^{1/2} \quad r_\beta = -i(1 - c_x^2/\beta^2)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Por lo tanto, la velocidad aparente c_x debe ser menor que la velocidad de corte.

La otra condición, que las tracciones en la superficie libre sean nulas, surgen de la reflexión $P - SV$ en la superficie libre (Sección 2.14). La diferencia aquí es que las condiciones de frontera se satisfacen sin onda incidente. Usando la ec. (2.94) sin una onda incidente se muestra que cuando los componentes de los esfuerzos son expresados en términos de los potenciales, las amplitudes A y B deben satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, 0, t) &= 0 = 2r_\alpha A + (1 - r_\beta^2)B, \\ \sigma_{zz}(x, 0, t) &= 0 = [\lambda(1 + r_\alpha^2) + 2\mu r_\alpha^2]A + 2\mu r_\beta B. \end{aligned} \quad (3.4)$$

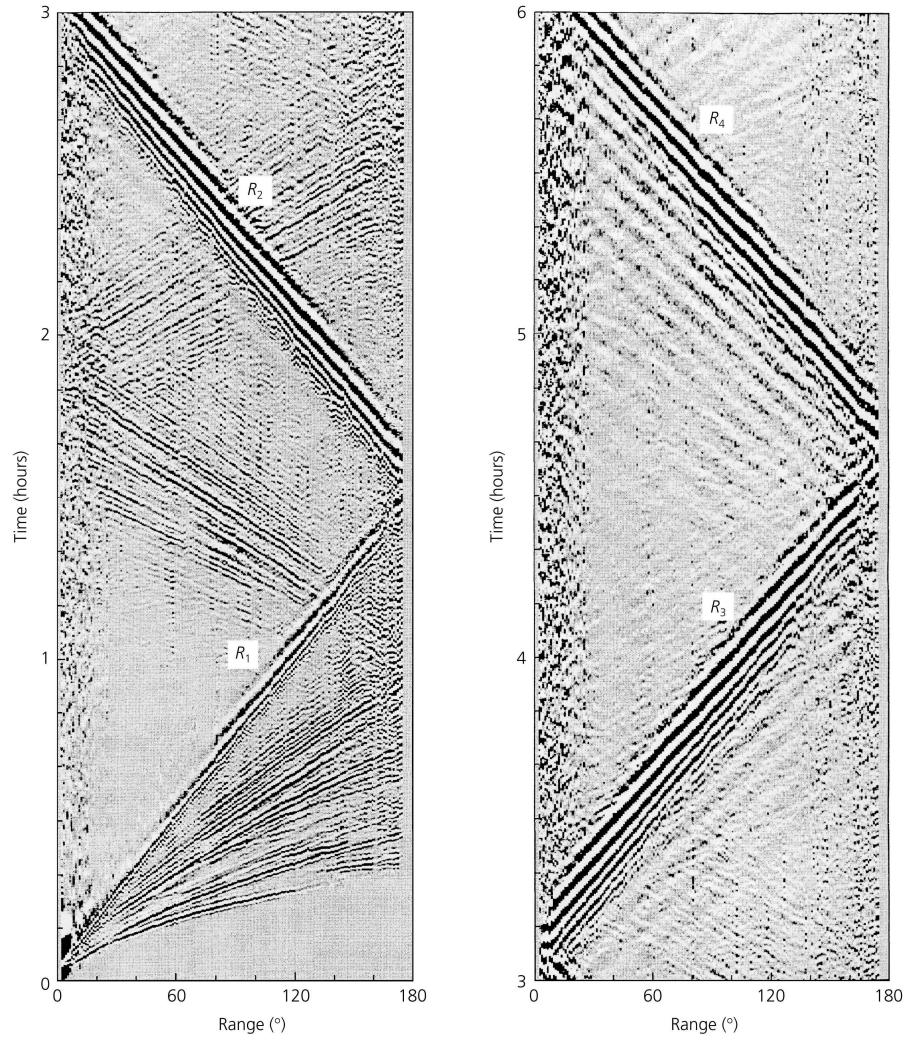


Figura 50: Sección grabada formada de sismogramas verticales de estaciones de la red IDA (International Deployment of Accelerometers). Los arribos del R_1 al R_4 están dispersos en el tiempo debido a la dispersión. Los arribos de onda de cuerpo aparecen antes y después de R_1 . Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

Eliminando las constantes de Lamé de la segunda ecuación usando $(1 + r_\alpha^2) = c_x^2/\alpha^2$ y las definiciones de las velocidades α y β se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas para A y B ,

$$\begin{aligned} 2(c_x^2/\alpha^2 - 1)^{1/2}A + (2 - c_x^2/\beta^2)B &= 0 \\ (c_x^2/\beta^2 - 2)A + 2(c_x^2/\beta^2 - 1)^{1/2}B &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Este sistema tiene soluciones no triviales si el determinante del sistema es cero, tal que

$$(2 - c_x^2/\beta^2)^2 + 4(c_x^2/\beta^2 - 1)^{1/2}(c_x^2/\alpha^2 - 1)^{1/2} = 0. \quad (3.6)$$

Para un semi-espacio con las velocidades α y β conocidas, esta ecuación da los valores de c_x para los cuales se satisfacen las condiciones de superficie libre. De las cuatro raíces, una es cero, y sólo una es consistente con el requerimiento de que $0 < c_x < \beta$. Para un sólido de Poisson, en donde $\alpha^2/\beta^2 = 3$, el determinante resultante es

$$(c_x^2/\beta^2)[c_x^6/\beta^6 - 8c_x^4/\beta^4 + (56/3)c_x^2/\beta^2 - 32/3] = 0. \quad (3.7)$$

Si se excluye la solución trivial $c_x^2/\beta^2 = 0$, se tiene una ecuación cúbica en c_x^2/β^2 , con raíces 4 , $2 + 2/\sqrt{3}$ (≈ 3.155) y $2 - 2/\sqrt{3}$ (≈ 0.845). Sólo la última raíz satisface $c_x < \beta$, la condición para que las ondas queden atrapadas en la superficie. Por lo que la velocidad aparente de una onda Rayleigh en un semi-espacio que es un sólido de Poisson es $c_x = (2 - 2/\sqrt{3})\beta = 0.92\beta$, ligeramente menor que la velocidad de corte. Los coeficientes de los potenciales (ec. (3.1)), pueden encontrarse de la ec. (3.5)

$$B = A(2 - c_x^2/\beta^2)/(2r_\beta) \quad (3.8)$$

y pueden sustituirse en los potenciales usados para encontrar los desplazamientos (ec. (2.92)). Tomando la parte real de las exponenciales y usando los valores numéricos de c_x/β y c_x/α para un sólido de Poisson se tiene

$$\begin{aligned} u_x &= Ak_x \sin(\omega t - k_x x) [\exp(-0.85k_x z)] \\ &\quad - 0.58 \exp(-0.39k_x z)] \\ u_z &= Ak_x \cos(\omega t - k_x x) [-0.85 \exp(-0.85k_x z) \\ &\quad + 1.47 \exp(-0.39k_x z)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

El desplazamiento puede ser caracterizado por su variación en profundidad y distancia a lo largo de la superficie. Ambos componentes son funciones sinusoidales de $(\omega t - k_x x)$, y por lo tanto ondas armónicas que se propagan en la dirección $+x$. Debido a que la onda armónica resultante se aplica solamente en la dirección x , la longitud de onda significativa es la longitud de onda horizontal a lo largo de la superficie, $\lambda_x = 2\pi/k_x$. El desplazamiento decae con la profundidad como $\exp(-k_x z)$ (Fig. 51), tal que la profundidad a la cual una onda de Rayleigh tiene un desplazamiento significativo es proporcional a la longitud de onda horizontal.

En la superficie, $z = 0$, los componentes del desplazamiento son

$$\begin{aligned} u_x &= 0.42Ak_x \sin(\omega t - k_x x) \\ u_z &= 0.62Ak_x \cos(\omega t - k_x x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para visualizar estos, considere el movimiento de una partícula del material en $x = 0$ como una función del tiempo. En $t = 0$, u_z es un máximo (z es positivo hacia abajo), y $u_x = 0$. Conforme el tiempo se incrementa, los desplazamientos x y z forman un movimiento contrario a las manecillas del reloj, o “retrógrado”, dibujando una elipse (Fig. 52, *izquierda*). Para un sólido de Poisson, el máximo desplazamiento vertical en

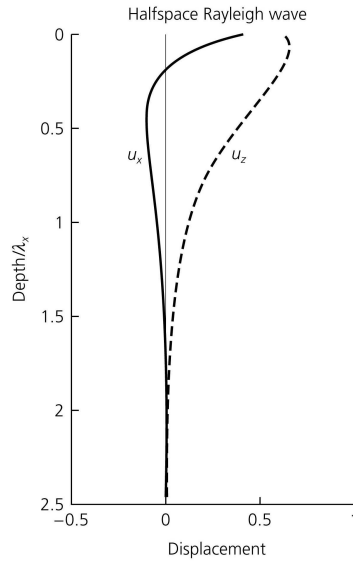


Figura 51: Variación de los componentes x y z del desplazamiento para una onda Rayleigh en un semi-espacio compuesto por un sólido de Poisson. Ambos componentes decaen con la profundidad y están normalizados por la longitud de onda horizontal. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

la superficie es aproximadamente 1.5 veces mayor que el máximo desplazamiento horizontal. El movimiento de partícula se vuelve “progrado” debajo de una profundidad cercana a un quinto de la longitud de onda, porque el término del decaimiento exponencial en u_x se vuelve negativo. La relación de fase entre los componentes horizontal y vertical del movimiento de una onda de Rayleigh puede observarse en sismogramas como se muestra en la Fig. 52 (*derecha*). Cuando el desplazamiento vertical está en un negativo máximo (e.g., cerca de 785 s), el desplazamiento radial es cero, correspondiente a $t = 0$ en la Fig. 52 (*izquierda*). Un cuarto de periodo después (e.g., cerca de 790 s) el desplazamiento vertical es cero, y el desplazamiento radial se encuentra en su máximo positivo, que corresponde a $t = T/4$.

Las ondas Rayleigh también existen cuando el medio es más complicado que un semi-espacio homogéneo. En este caso, en lugar de tener una sola velocidad aparente para todas las frecuencias, c_x es una función de la frecuencia. Se ilustrará esta idea a continuación usando ondas Love.

3.3. Ondas Love en una capa sobre un semi-espacio

Un segundo tipo de onda superficial, onda Love, resulta de la interacción de ondas SH . La geometría más simple (Fig. 53) en la cual una onda de Love puede ocurrir es en una capa con espesor h de material con velocidad β_1 , sobre un semi-espacio de material con una velocidad mayor β_2 . Las ondas de Love requieren una estructura de

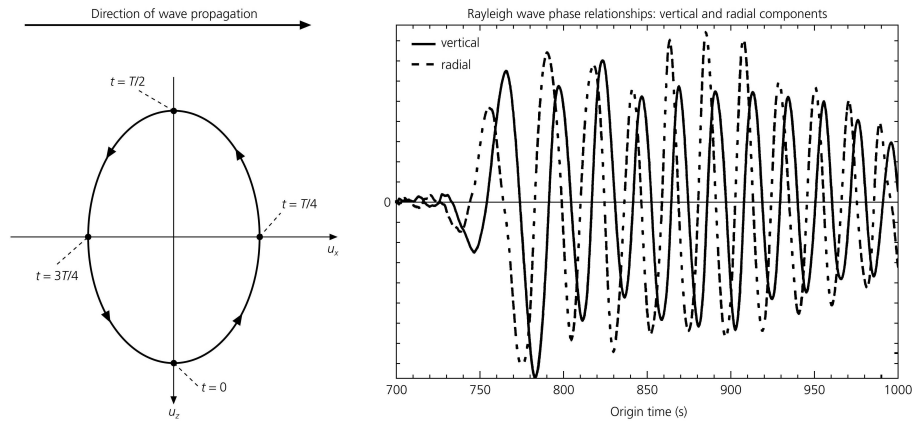


Figura 52: Para una onda Rayleigh, los componentes horizontal (radial) y vertical del movimiento del terreno se encuentran desfasados en un modo característico. *Izquierda:* Como los componentes están desfasados, el movimiento de partícula en un punto de la superficie libre como una función del tiempo es una elipse retrograda. La partícula se mueve de forma opuesta a la dirección de la propagación de la onda en la cima de la elipse. *Derecha:* Comparación de los componentes de desplazamiento de los sísmogramas de un terremoto en las islas Kuril grabado en Micronesia, muestra que un componente alcanza su máximo cuando el otro es cero. Imagen tomada de Stein y Wyession (2003).

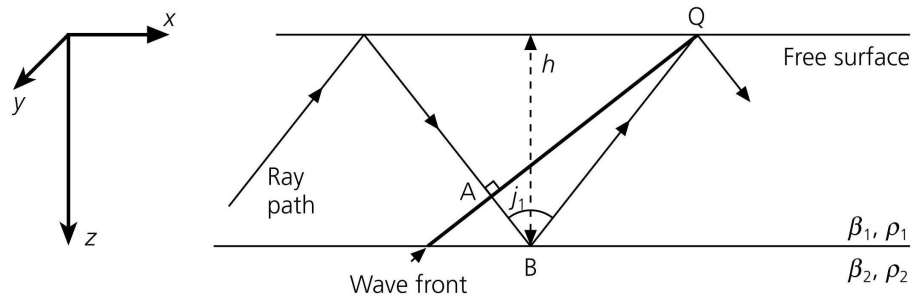


Figura 53: Geometría de una capa sobre un semi-espacio para ondas de Love. Las ondas de Love existen si la velocidad de las ondas de corte en la capa es menor que la del semi-espacio. Estas ondas pueden tratarse como la interferencia constructiva entre ondas SH que inciden en la interfaz por arriba del ángulo crítico. Imagen tomada de Stein y Wyession (2003).

velocidad que varía con la profundidad, y no pueden existir en un semi-espacio, en contraste con las ondas Rayleigh.

Para describir las ondas Love, se escriben los desplazamientos SH en la capa como la

suma de una onda que sube y otra que baja

$$u_y^-(x, z, t) = B_1 \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta_1} z)) + B_2 \exp(i(\omega t - k_x x + k_x r_{\beta_1} z)). \quad (3.11)$$

En el semi-espacio se requiere solo un término

$$u_y^+(x, z, t) = B' \exp(i(\omega t - k_x x - k_x r_{\beta_2} z)). \quad (3.12)$$

Como se hizo anteriormente, se impone una condición de frontera radiativa que asegura que la energía no viaja al semi-espacio como una onda que se propaga. La energía estará atrapada cerca de la interfaz si $\exp(-ik_x r_{\beta_2} z)$ es una exponencial negativa real que decae conforme $z \rightarrow \infty$. Esta condición ocurre si la velocidad aparente es menor que la velocidad de corte en el semi-espacio, $c_x < \beta_2$, tal que

$$r_{\beta_2} = (c_x^2/\beta_2^2 - 1)^{1/2} = -i(1 - c_x^2/\beta_2^2)^{1/2} = -ir_{\beta_2}^*. \quad (3.13)$$

Las amplitudes B_1 , B_2 y B' pueden encontrarse usando las condiciones de frontera en la superficie libre y en la interfaz entre la capa y el semi-espacio. En la superficie libre, $z = 0$, la tracción debe ser cero para toda x y t

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(x, 0, t) &= \mu_1 \left(\frac{\partial u_y^-}{\partial z} \right) (x, 0, t) \\ &= \mu_1 (ik_x r_{\beta_1}) (B_2 - B_1) \exp(i(\omega t - k_x x)) = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

de modo que $B_1 = B_2$. En la interfaz $z = h$, el desplazamiento debe ser continuo para toda x y t , tal que

$$B_1 [\exp(-ik_x r_{\beta_1} h) + \exp(ik_x r_{\beta_1} h)] = B' \exp(-ik_x r_{\beta_2} h). \quad (3.15)$$

De manera similar, el componente del esfuerzo σ_{yz} debe ser continuo también en la interfaz para toda x y t , tal que

$$\begin{aligned} \mu_1 (-ik_x r_{\beta_1}) B_1 [\exp(-ik_x r_{\beta_1} h) - \exp(ik_x r_{\beta_1} h)] \\ = \mu_2 (-ik_x r_{\beta_2}) B' \exp(-ik_x r_{\beta_2} h). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Al reescribir los exponenciales complejos en funciones seno y coseno, las condiciones (3.15) y (3.16) pueden escribirse

$$\begin{aligned} 2B_1 \cos(k_x r_{\beta_1} h) &= B' \exp(-ik_x r_{\beta_2} h) \\ 2i\mu_1 r_{\beta_1} B_1 \sin(k_x r_{\beta_1} h) &= -\mu_2 r_{\beta_2} B' \exp(-ik_x r_{\beta_2} h). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dividiendo la segunda condición por la primera se obtiene

$$\tan(k_x r_{\beta_1} h) = (-\mu_2 r_{\beta_2}) / (i\mu_1 r_{\beta_1}) = (\mu_2 r_{\beta_2}^*) / (\mu_1 r_{\beta_1}). \quad (3.18)$$

Esta ecuación tiene un significado especial. Esta ofrece una relación entre el número de onda horizontal, k_x , y la velocidad horizontal aparente, c_x , que debe satisfacer la onda

de Love para existir. Como $c_x = \omega/k_x$, esto significa que para una velocidad horizontal aparente, las ondas Love deben tener números de onda horizontales específicos y por lo tanto frecuencias angulares. De manera alternativa, para un periodo particular o frecuencia angular, las ondas Love pueden tener solamente ciertas velocidades horizontales aparente o números de onda. Por lo que frecuencias diferentes tienen diferentes velocidades aparentes, un fenómeno llamado dispersión. Relaciones como la ec. (3.18), que dan la velocidad aparente, c_x como función de ω o k_x , son llamadas *relaciones de dispersión*, o *ecuaciones de periodo*.

Antes de examinar las relaciones de dispersión a mayor detalle, se derivarán de una manera diferente. La condición de velocidad aparente $c_x < \beta_2$ (ec. (3.13)) también surge (Sección 2.13) para ondas *SH* incidentes en una interfaz con ángulos que exceden el ángulo crítico, $\sin^{-1}(\beta_1/\beta_2)$. En la geometría de la Fig. 53, estas ondas son totalmente reflejadas tanto en la interfaz como en la superficie libre, y por lo tanto quedan atrapadas en la capa.

Considere la porción de la trayectoria de rayo *ABQ* a lo largo largo de la cual una onda que baja con ángulo de incidencia j_1 se refleja en la interfaz y después en la superficie libre. Si la fase de la onda cambia por un múltiplo de 2π , el frente de onda que baja normal a la trayectoria de rayo en *Q* estará en fase con, y por lo tanto interfiere constructivamente con, el frente de onda que baja normal a la trayectoria de rayo en *A*. El cambio de fase que sucede de *A* a *Q* consiste de dos términos, uno debido a las reflexiones y otro debido a la propagación. Por la ec. (2.89), la reflexión postcrítica provoca un cambio de fase de $2 \tan^{-1}[(\mu_2 r_{\beta_2}^*)/(\mu_1 r_{\beta_1})]$, mientras que la reflexión de la superficie libre no cambia la fase. Además, como la la onda se propaga una distancia $AB + BQ$, la fase cambia por $-(AB + BQ)k_{\beta_1}$. La distancia puede escribirse como

$$\begin{aligned} AB + BQ &= BQ \cos 2j_1 + h/\cos j_1 \\ &= (\cos 2j_1 + 1)(h/\cos j_1) = 2h \cos j_1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

usando $\cos 2j_1 = \cos^2 j_1 - 1$. La condición para la interferencia constructiva es entonces el cambio de fase total dado por

$$-2k_{\beta_1} h \cos j_1 + 2 \tan^{-1}[(\mu_2 r_{\beta_2}^*)/(\mu_1 r_{\beta_1})] = 2n\pi, \quad (3.20)$$

o, como $\tan(n\pi) = 0$,

$$\tan(k_{\beta_1} h \cos j_1) = \tan(k_x r_{\beta_1} h) = (\mu_2 r_{\beta_2}^*)/(\mu_1 r_{\beta_1}). \quad (3.21)$$

De modo que la relación de dispersión de ondas Love que se derivaron a partir de las condiciones de frontera, también pueden ser vistas como un criterio de interferencia para ondas *SH* reflejadas críticas, que corresponden a ondas que se propagan en la capa y una onda evanescente en el semi-espacio de mayor velocidad.

3.4. Dispersión de ondas Love

La ecuación de dispersión (ec. 3.21) puede escribirse como una función de cualesquiera dos de los tres parámetros c_x , ω y k_x . Para encontrar sus soluciones, se escribe

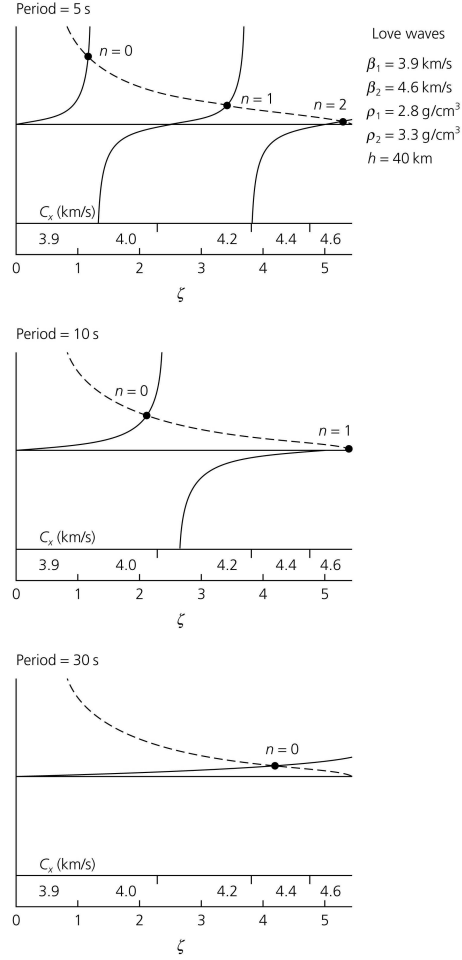


Figura 54: Solución gráfica de la relación de dispersión para ondas Love en una capa sobre un semi-espacio. El lado izquierdo de la ec. (3.24) está representado por curvas sólidas, $\tan(\omega\zeta)$, con ceros en $n\pi/\omega$. Las hipérbolas decrecientes discontinuas representan el lado derecho de la ec. (3.24). Las intersecciones de las curvas (puntos) son las raíces de la ecuación y son las velocidades aparentes para un periodo dado. Las velocidades aparentes varían entre las velocidades de corte de la capa (β_1) y el semi-espacio (β_2). Para periodos más grandes existen menos soluciones y por lo tanto menos modos. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

en términos de la frecuencia y velocidad aparente como

$$\tan[(\omega h/c_x)(c_x^2/\beta_1^2 - 1)^{1/2}] = \frac{\mu_2(1 - c_x^2/\beta_2^2)^{1/2}}{\mu_1(c_x^2/\beta_1^2 - 1)^{1/2}}. \quad (3.22)$$

Como la función tangente está definida para valores reales, las raíces cuadradas deben ser reales, tal que la velocidad aparente está acotada entre $\beta_1 < c_x < \beta_2$. Una solución gráfica puede derivarse al definir una nueva variable

$$\zeta = (h/c_x)(c_x^2/\beta_1^2 - 1)^{1/2}, \quad (3.23)$$

de modo que en el rango admisible de la velocidad aparente, $\zeta = 0$ en $c_x = \beta_1$, y $\zeta_{\text{máx}} = h(1/\beta_1^2 - 1/\beta_2^2)^{1/2}$ en $c_x = \beta_2$. Entonces, la ec. (3.23) puede escribirse como

$$\tan(\omega\zeta) = \left(\frac{\mu_2(1 - c_x^2/\beta_2^2)^{1/2}}{\mu_1} \right) \left(\frac{h}{c_x\zeta} \right). \quad (3.24)$$

Como se muestra en la Fig. 54, el lado izquierdo de la ecuación, $\tan(\omega\zeta)$, tiene ceros en $\zeta = n\pi/\omega$ y tiende a infinito en $\zeta = \pi/2\omega, 3\pi/2\omega$, etc. El lado derecho de la ecuación, que tiene una forma hiperbólica por la dependencia de $1/\zeta$, es infinito para $c_x = \beta_1$, y donde $\zeta = 0$, y decae monótonicamente a cero en $c_x = \beta_2$, donde $\zeta = \zeta_{\text{máx}}$. Las soluciones existen donde las dos curvas intersecan, dando los valores de ζ y por ende c_x para lo cuales una onda de Love con una ω dada ocurre. Las soluciones son llamadas *modos*, tal que para una frecuencia dada existen varios modos, cada uno con velocidades aparentes diferentes. La solución más a la izquierda, con la más baja c_x , es llamada el *modo fundamental*; los otros son *modos superiores*, o *sobretonos*, numerados del 1 al n .

La Fig. 54 ilustra la ec. (3.24) para tres diferentes periodos usando un modelo de la corteza continental y el manto de un espesor de 40 km con $\beta_1 = 3.9$ km/s y $\rho_1 = 2.8$ g/cm³ sobre un semi-espacio con $\beta_2 = 4.6$ km/s y $\rho_2 = 3.3$ g/cm³. Para ondas con un periodo de 5 s, existen tres soluciones en el rango admisible de velocidad aparente: $c_x = 3.92, 4.13$ y 4.55 km/s.

Considere ahora que sucede para periodos más grandes o frecuencias más bajas. Los ceros en la curva tangente $\zeta = n\pi/\omega$ aumentan su valor, de modo que el espaciamiento entre las curvas tangente, π/ω , se incrementa. Como resultado, existen menos curvas tangentes dentro del rango de ζ , que es $n\pi/\omega < \zeta_{\text{máx}}$. Por lo tanto, como la curva decreciente no depende de ω , existen menos soluciones, c_x , para periodos más grandes. Para una frecuencia angular dada, la solución con los más grandes valores posibles de ζ ocurren cuando la n -ésima solución es $\zeta_{\text{máx}}$, entonces $c_x = \beta_2$. En este caso, $\tan \omega\zeta_{\text{máx}} = 0$, entonces $\omega\zeta_{\text{máx}} = n\pi$, y

$$\omega = \omega_{cn} = n\pi/[h(1/\beta_1^2 - 1/\beta_2^2)^{1/2}]. \quad (3.25)$$

Esta frecuencia angular, llamada frecuencia de corte angular para el n -ésimo modo superior, es la más pequeña ω en que el modo existe. Las curvas tangentes con valores mayores de n se encuentran fuera del rango admisible de ζ . Tal que, para periodos suficientemente largos, sólo el modo fundamental existe.

Usando este método, se puede calcular las velocidades aparentes para diferentes periodos. La Fig. 55 muestra las curvas resultantes, llamadas *ramas* modo o sobretono, para el modo fundamental y los primeros dos modos superiores. En los periodos más grandes solo el modo fundamental existe, mientras que para periodos más cortos los modos superiores existen. Por ejemplo, a un periodo de 5 s existen tres modos, para 10

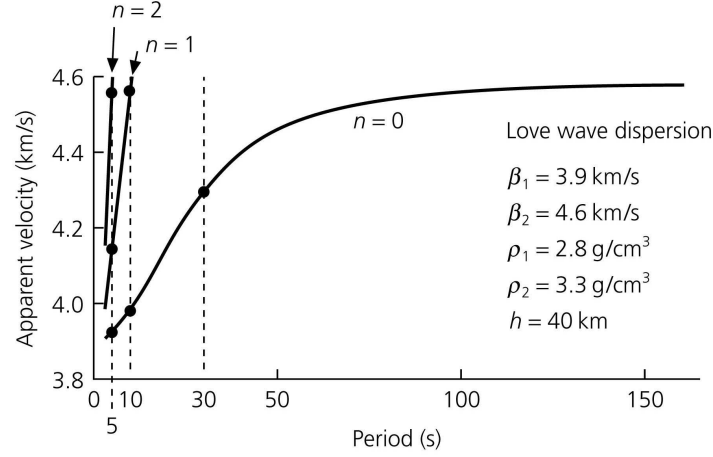


Figura 55: Curvas de dispersión dada la relación entre la velocidad aparente y el periodo para ondas Love en una capa sobre un semi-espacio. Para cada modo, las velocidades aparentes varían entre la velocidad de la capa β_1 y la velocidad del semi-espacio β_2 . La curva inferior es la rama del modo fundamental y las ramas de los sobretonos se encuentran por arriba de esta, con velocidades mayores para cualquier periodo. Los puntos muestran los modos de la Fig. 54. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

s existen solo dos modos, pero a 30 s solo el modo fundamental existen. Los modos con periodo más grande de cada rama tienen $c_x \rightarrow \beta_2$, de modo que su velocidad aparente depende de la velocidad de corte en el semi-espacio y no es afectada por la velocidad de corte en la capa. Por lo tanto a periodos grandes, las ramas en la Fig. 55 se acercan a la velocidad del semi-espacio, $\beta_2 = 4.6$ km/s. De forma similar. Los modos con periodos más cortos de cada rama tienen $c_x \rightarrow \beta_1 = 3.9$ km/s, tal que su velocidad aparente se aproxima a la velocidad de la capa.

Esta variación en la velocidad aparente refleja diferencias en los desplazamientos entre los modos. En la capa, como las amplitudes B_1 y B_2 de las ondas que suben y bajan son iguales, el desplazamiento (ec. (3.11)) puede escribirse

$$u_y^-(x, z, t) = 2B_1 \exp(i(\omega t - k_x x)) \cos(k_x r_{\beta_1} z). \quad (3.26)$$

En el semi-espacio, el desplazamiento (ec. (3.12)) es

$$u_y^+(x, z, t) = B' \exp(i(\omega t - k_x x)) \exp(-k_x r_{\beta_2}^* z), \quad (3.27)$$

entonces, por la continuidad del desplazamiento en la interfaz $z = h$,

$$B' = 2B_1 \cos(k_x r_{\beta_1} h) / \exp(-k_x r_{\beta_2}^* h). \quad (3.28)$$

De modo que, tanto en la capa como en el semi-espacio, se tiene una onda que se propaga en la dirección x , con número de onda horizontal $k_x = 2\pi/\lambda_x = \omega/c_x$. En la capa, el desplazamiento varía con la profundidad como $\cos(k_x r_{\beta_1} z)$, de modo que oscila. En

el semi-espacio, el desplazamiento decae exponencialmente con la profundidad como $\exp(-k_x r_{\beta_2}^* z)$.

La variación del desplazamiento en las direcciones x y z se ilustra en la Fig. 56 para

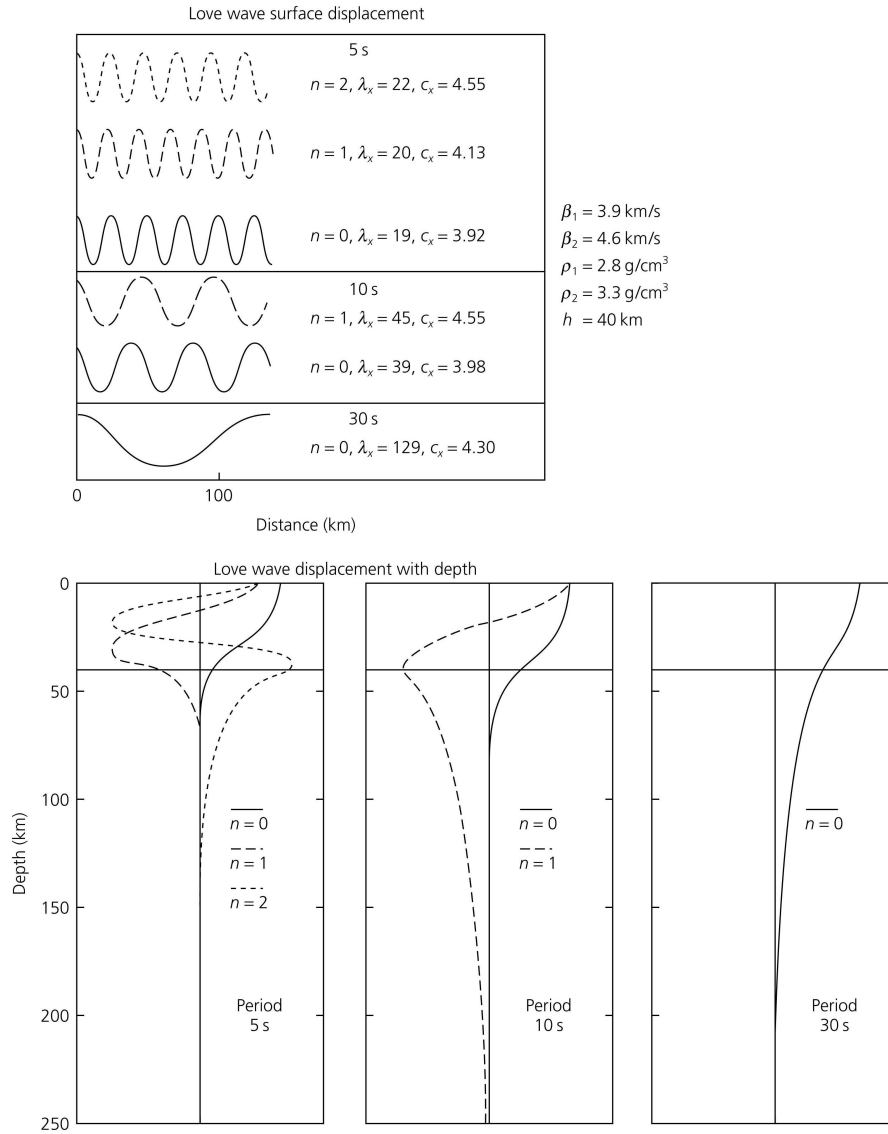


Figura 56: Variación del desplazamiento a lo largo de la superficie (*arriba*) y como una función de la profundidad (*abajo*) para ondas Love en una capa sobre un semi-espacio. La figura muestra los modos para los tres periodos de las Figs. 54 y 55. Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

los tres periodos cuyas velocidades aparentes se encontraron en la Fig. 54. La variación horizontal se muestra en los paneles superiores. Como la velocidad aparente se incrementa con el periodo (Fig. 55), mientras mayor sea su velocidad aparente, mayor será su longitud de onda horizontal. De modo que, para los casos del modo fundamental ($n = 0$) mostrados, el mayor periodo (30 s) tiene la mayor velocidad aparente y por lo tanto la mayor longitud de onda horizontal. En un periodo dado (Fig. 55), mayor sea el modo, mayor será la velocidad aparente y por lo tanto tendrá una mayor longitud de onda horizontal. De modo que, para los tres modos mostrados con periodo de 5 s, $n = 2$ tendrá la mayor longitud de onda horizontal.

La variación con profundidad, llamada la *eigenfunción* vertical del modo, es diferente para cada modo. Para una rama dada, la profundidad de penetración en el semi-espacio se incrementa con el periodo, tal que de los periodos del modo fundamental mostrados, el mayor (30 s) “ve” a mayor profundidad en el semi-espacio y por ende tiene una mayor velocidad aparente. Por el contrario, los modos con periodo más corto de una rama dada penetran una menor profundidad y tienen una menor velocidad aparente. A un periodo dado, los modos superiores oscilan más rápido con la profundidad en la capa y entonces cambian de signo en más ocasiones. En el semi-espacio, sin embargo, los modos superiores decaen más lentamente y penetran a una mayor profundidad. La eigenfunción para un modo con orden n tiene n cruces al cero, o nodos, con la profundidad.

El hecho de que el desplazamiento se comporta diferente con la profundidad para varios modos y periodos hacen a las ondas Love dispersivas. En esta derivación, las velocidades de corte *intrínsecas* de la capa y el semi-espacio no dependen de la frecuencia. Sin embargo, la velocidad aparente resultante a lo largo de la superficie libre depende de la frecuencia. Esta dispersión resulta del hecho que las ondas Love de distintos periodos tienen diferentes desplazamientos en profundidad, y la velocidad intrínseca del medio varía con la profundidad. Como resultado, la dispersión de ondas superficiales es útil para estudiar la estructura de la Tierra.

En contraste, la onda Rayleigh en un semi-espacio no muestra esta dispersión. Esta onda es una onda de superficie “verdadera” porque existe en un semi-espacio homogéneo debido a la interacción de ondas P y SV . Por otro lado, la onda de Love en una capa sobre un semi-espacio existe porque las propiedades del medio varían con la profundidad, y causan la interferencia entre ondas SH . La dispersión de ondas de Love y Rayleigh también ocurre en medios cuyas propiedades varían con la profundidad de manera más complicada. Las curvas de dispersión para ondas Love y Rayleigh en tales medios pueden calcularse por varios métodos. Una alternativa es extender el método usado en la Sección 3.3 al tratar el medio como un conjunto de capas homogéneas sobre un semi-espacio. Como para el caso de una capa, se asume que el desplazamiento en cada capa está dado por soluciones exponenciales y se encuentran combinaciones de frecuencia y velocidad aparente horizontal que satisfagan las condiciones de frontera en la superficie libre, en cada frontera entre las capas y con el semi-espacio. Otra aproximación es ver las ondas de superficie como modos normales de una Tierra esférica.

3.5. Velocidad de fase y grupo

En la sección anterior, se estudió la dispersión de ondas Love que muestra que la velocidad aparente varía con la frecuencia. Usualmente al hablar de dispersión se usan las velocidades de grupo y de fase que serán explicadas a continuación considerando un ejemplo muy sencillo.

Considere la suma de dos ondas armónicas con una ligera diferencia en sus frecuencias angulares y números de onda

$$u(x, t) = \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x). \quad (3.29)$$

Las frecuencias angulares y los número de onda pueden escribirse en términos de las diferencias con respecto a los valores promedio de ω y k

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega + \delta\omega, & \omega_2 &= \omega - \delta\omega, & \omega &\gg \delta\omega, \\ k_1 &= k + \delta k, & k_2 &= k - \delta k, & k &\gg \delta k. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Usando esta sustitución en el desplazamiento se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \cos(\omega t + \delta\omega t - kx - \delta kx) \\ &\quad + \cos(\omega t - \delta\omega t - kx + \delta kx) \\ &= 2 \cos(\omega t - kx) \cos(\delta\omega t - \delta kx). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por lo tanto la suma de dos ondas armónicas es un producto de funciones coseno (Fig. 57). Por sus argumentos, ambas corresponden a ondas armónicas que se propagan. Como $\delta\omega$ es menor que ω , el segundo término tiene una frecuencia menor, y por lo tanto varía más lentamente con el tiempo que el primero. De manera similar, como δk es menor que k , el segundo término varía más despacio en el espacio. De modo que se tiene una onda *portadora* con frecuencia angular ω y número de onda k , sobre la cual una onda *envolvente* más lenta con frecuencia angular $\delta\omega$ y número de onda δk es superpuesta.

Siguiendo una fase constante de cada término se observa que cada onda viaja a una velocidad diferente. La envolvente, se propaga a la *velocidad de grupo*

$$U = \delta\omega / \delta k, \quad (3.32)$$

mientras que la portadora se mueve con la *velocidad de fase*,

$$c = \omega / k. \quad (3.33)$$

La diferencia entre las dos velocidades está ilustrada en la Fig. 57. La comparación de la señal en tiempos diferentes muestra que la envolvente se propaga a una velocidad diferente que la portadora. Esta diferencia explica porque en los sismogramas de la Fig. 50 las líneas individuales tiene una pendiente (velocidad de fase) diferente de la pendiente (velocidad de grupo) de todo el patrón de ondas superficiales.

4. Atenuación de ondas sísmicas

Objetivo: El alumno comprenderá la naturaleza de los mecanismos de atenuación de la amplitud sísmica.

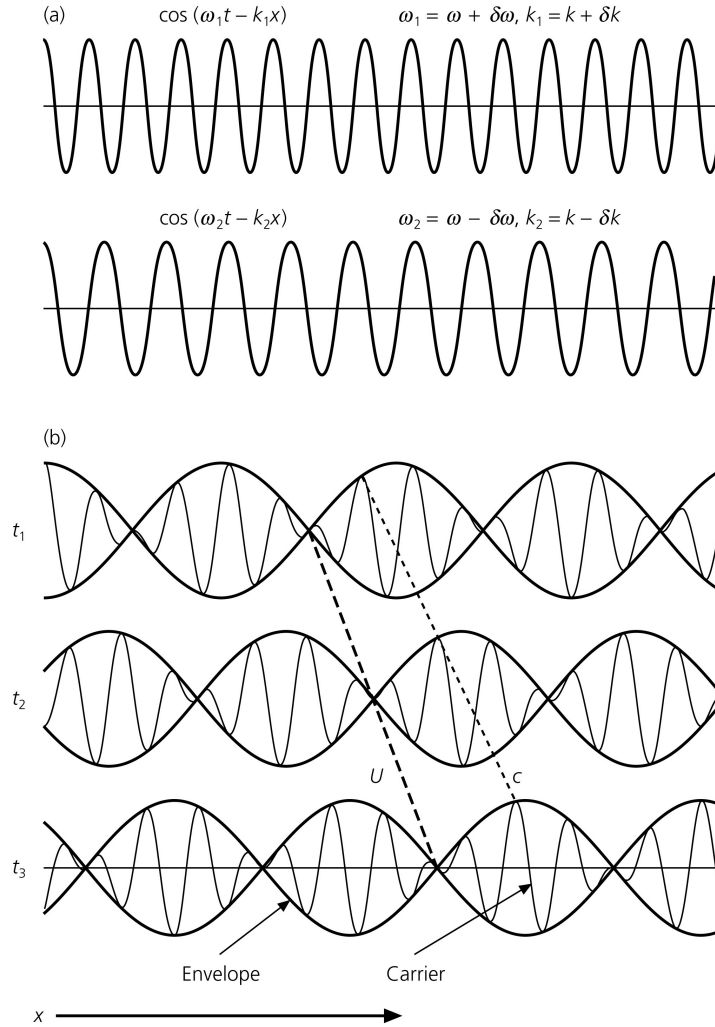


Figura 57: (a) Dos ondas sinusoidales con ligeras diferencias en sus frecuencias y números de onda. (b) Su suma es una función del tiempo con una envolvente de periodo largo que se propaga a una velocidad de grupo U . El conjunto de ondas, la oscilación de alta frecuencia cuya amplitud es modulada por la envolvente, se propaga a una velocidad de fase c . Imagen tomada de Stein y Wysession (2003).

4.1. Introducción

Las ondas sísmicas se atenúan, decrecen en amplitud, conforme estas se propagan. En la Sección 2 se discutió como la reflexión y transmisión de ondas sísmicas debido a interfaces reducen su amplitud. Existen otros cuatro procesos que pueden reducir la amplitudes de las ondas: *dispersión geométrica*, *esparcimiento (scattering)*, *multi-*

trayecto y *anelasticidad*. Los primeros tres son procesos elásticos, en donde la energía del campo de onda es conservado. Mientras que, la anelasticidad, algunas veces llamada *atenuación intrínseca*, involucra la conversión de energía en calor.

Como en muchas aplicaciones en sismología, resulta valioso considerar analogías con el comportamiento de la luz. Conforme se aleja de un farol en la noche, la intensidad de su luz disminuye por varias razones. La primera es la dispersión geométrica: la luz se aleja de la lámpara en frentes de onda esféricos en expansión (Sección 1.3.2.1). Por la conservación de energía, la energía en una unidad de área del frente de onda creciente decrece como r^{-2} , donde r es el radio de la esfera o distancia del faro.

Segunda, la luz disminuye conforme esta se esparce debido a las moléculas de aire, polvo y agua en el aire. Como resultado del esparcimiento se tiene que al impactar un rayo sobre un difractor, su energía se esparce en todas direcciones. Este efecto es dramático en una noche con neblina porque la luz esparcida genera una halo alrededor del faro.

Tercera, la luz se enfoca y desenfoca por cambios en las propiedades refractivas del aire. Este efecto es llamado multi-trayecto en sismología. En enfoque y desenfoco puede ser ilustrado al observar la luz de la calle a través de binoculares. Mirando a través de binoculares en la manera usual, las ondas son enfocadas por lo lentes, y el farol aparece más cerca y brillante. Invirtiendo los binoculares observamos el farol más lejos y menos brillante.

Cuarta, algo de la energía de la luz es absorbida por el aire y convertida en calor. Este proceso difiere de los otros tres en que la energía de la luz se pierde, no simplemente se mueve a una trayectoria diferente.

Los cuatro procesos son importantes para ondas sísmicas. Los primeros tres son descritos por la teoría de ondas elásticas, y puede incrementar o decrementar la amplitud de una onda que arriva al desplazar la energía dentro del campo de onda. Por el contrario, la anelasticidad reduce las amplitudes de las ondas solo porque la energía se pierde de las ondas elásticas. Gran parte de la sismología está construida bajo la aproximación de que la Tierra responde elásticamente durante la propagación sísmica y es fácil olvidar que en realidad la Tierra no es perfectamente elástica. Sin anelasticidad, las ondas sísmicas de cada terremoto ocurrida seguirían retumbando hasta que su acumulación destruyera la Tierra. La elasticidad es una buena aproximación de la Tierra pero existen muchas implicaciones y aplicaciones importantes de la anelasticidad. En esta sección se estudiará la atenuación de ondas sísmicas asociada a la anelasticidad.

4.2. Atenuación de un oscilador lineal

Se puede obtener una mayor intuición de la atenuación intrínseca de ondas sísmicas al examinar un sistema simple, un oscilador armónico atenuado compuesto de un resorte y un amortiguador (Fig. 58b). Primero se empezará el análisis con un oscilador armónico (Fig. 58a) utilizando la segunda ley de Newton, $\underline{F} = m\underline{a}$, para describir el desplazamiento $u(t)$ de una masa m . La fuerza restauradora del resorte es proporcional a menos la constante k del resorte multiplicada por la extensión o desplazamiento de la posición de equilibrio, tal que

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + k u(t) = 0. \quad (4.1)$$

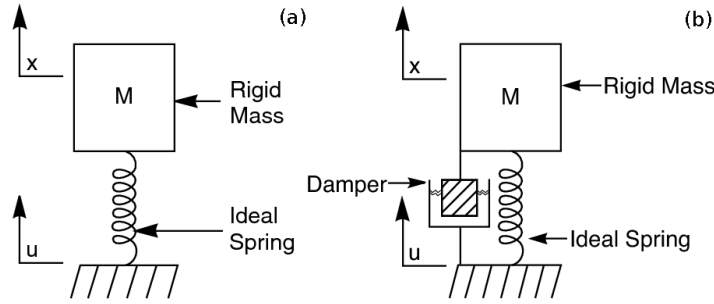


Figura 58: (a) Esquema de un oscilador armónico (b) Esquema de un oscilador armónico amortiguado.

Una vez en movimiento por una fuerza impulsiva, el sistema sin fricción tiene una respuesta elástica pura descrita por una oscilación armónica perpetua

$$u(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}, \quad (4.2)$$

donde A y B son constantes, y la masa se mueve hacia atrás y adelante con una frecuencia natural

$$\omega_0 = (k/m)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Un ejemplo de esta solución general es

$$u(t) = A_0 \cos(\omega_0 t). \quad (4.4)$$

Una vez que el movimiento ha empezado, la oscilación continua por siempre, porque no existe pérdida de energía. Sin embargo, esto no es más el caso si el sistema contiene un amortiguador (Fig. 58b). La fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad de la masa y se opone al movimiento. De modo que la ecuación de movimiento (4.1) se vuelve

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \gamma m \frac{du(t)}{dt} + ku(t) = 0, \quad (4.5)$$

donde γ es el *factor de atenuación*.

Para simplificar la ecuación anterior, se define el *factor de calidad*

$$Q = \omega_0 / \gamma, \quad (4.6)$$

y se reescribe la ec. (4.5) como

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0. \quad (4.7)$$

Esta ecuación diferencial, que describe a un oscilador armónico amortiguado, puede resolverse asumiendo que el desplazamiento es la parte real del exponente complejo

$$u(t) = A_0 e^{ipt}, \quad (4.8)$$

donde p es un número complejo.

Al sustituir la ec. (4.8) en la ec. (4.7) se tiene

$$(-p^2 + ip\omega_0/Q + \omega_0^2)A_0e^{i(pt)} = 0. \quad (4.9)$$

Para que esta se satisfaga para todo valor de t ,

$$-p^2 + ip\omega_0/Q + \omega_0^2 = 0. \quad (4.10)$$

Como p es complejo, se separa en sus partes real e imaginaria,

$$p = a + ib, \quad p^2 = a^2 + 2iab - b^2, \quad (4.11)$$

tal que la ec. (4.10) se reescribe como

$$-a^2 - 2iab + b^2 + ia\omega_0/Q - b\omega_0/Q + \omega_0^2 = 0, \quad (4.12)$$

que puede dividirse en ecuaciones para la parte real y para la parte imaginaria que se resuelven de forma separada

$$\begin{array}{ll} \text{Real} & -a^2 + b^2 - b\omega_0/Q + \omega_0^2 = 0, \\ \text{Imaginaria} & -2ab + a\omega_0/Q = 0. \end{array} \quad (4.13)$$

Resolviendo la parte imaginaria para b

$$b = \frac{\omega_0}{2Q}, \quad (4.14)$$

y sustituyendo el valor de b en la ecuación real

$$a^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2} = \omega_0^2(1 - \frac{1}{4Q^2}). \quad (4.15)$$

Entonces se define

$$\omega = a = \omega_0(1 - \frac{1}{4Q^2})^{1/2}, \quad (4.16)$$

y se reescribe la ec. (4.8) con las partes reales e imaginarias separadas,

$$u(t) = A_0e^{i(\omega t + ibt)} = A_0e^{-bt}e^{i\omega t}. \quad (4.17)$$

La parte real es la solución para el desplazamiento armónico amortiguado

$$u(t) = A_0e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega t). \quad (4.18)$$

Esta solución muestra como el oscilador amortiguado responde a un impulso en el tiempo cero (Fig. 59). Esta solución ya no es un simple oscilación armónica porque difiere de dos maneras con respecto a la solución sin amortiguamiento (4.4). El término exponencial expresa el decaimiento de la envolvente de la señal

$$A(t) = A_0 \exp^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}, \quad (4.19)$$

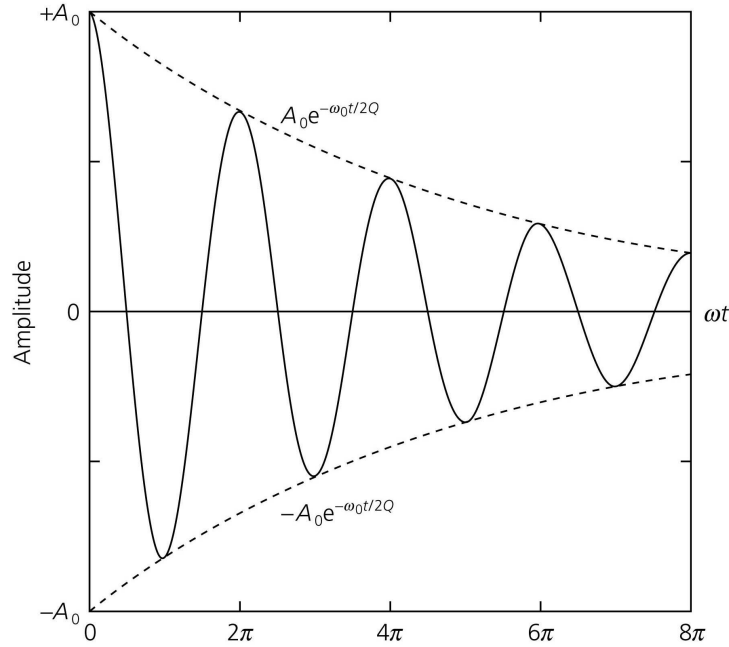


Figura 59: Para un oscilador armónico amortiguado, la amplitud de la envolvente (líneas discontinua) es inicialmente A_0 y decae con el tiempo a una tasa determinada por el factor de calidad Q . Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

que se superpone en la oscilación armónica dada por el término del coseno. Más aún, la frecuencia de la oscilación armónica (ec. (4.16)) es diferente a la frecuencia natural del sistema sin amortiguamiento, ω_0 , por una cantidad que depende del factor de calidad. Q es inversamente proporcional al factor de amortiguamiento, γ , tal que mientras menor sea el amortiguamiento, mayor es Q . Sin amortiguamiento, Q es infinito, porque la amplitud del sistema no decae con el tiempo (ec. 4.19), y tampoco cambia su frecuencia natural ω_0 (ec. (4.16)). Conforme el amortiguamiento se incrementa, Q decrece, su amplitud decae más rápido y la frecuencia cambia más con respecto al valor sin amortiguamiento. La ec. (4.19) muestra que la amplitud decae a e^{-1} (0.37) de su valor original por el *tiempo de relajación*

$$t_{1/e} = 2Q/\omega_0. \quad (4.20)$$

Debido a que la energía en un sistema oscilante es proporcional al cuadrado de la amplitud, como se observó para una onda armónica en la Sección 2.12, de la ec. (4.19) se obtiene la energía del oscilador como

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2(t) = \frac{1}{2}kA_0^2e^{-\omega_0 t/Q} = E_0e^{-\omega_0 t/Q}. \quad (4.21)$$

La energía decae más rápido que la amplitud, porque el exponente negativo en la ec. (4.21) es el doble que en la ec. (4.20).

4.3. Factor de calidad, Q

La solución del oscilador armónico amortiguado incorpora el amortiguamiento a través del factor de calidad Q . La atenuación de ondas sísmicas y otros fenómenos físicos son usualmente discutidos en términos de Q o Q^{-1} . A pesar de que Q tiene valores más convenientes, Q^{-1} tiene la ventaja de que es directamente proporcional al amortiguamiento. En algunos casos, Q es usado para describir el decaimiento de una oscilación, mientras que en otros es usado para describir las propiedades físicas del sistema que causan un cambio en la atenuación. Por ejemplo, el valor de Q de alguno de los modos normales de la Tierra, que es directamente análogo al de un oscilador amortiguado, describe como el modo decae con el tiempo. Este decaimiento resulta de la distribución de material en la Tierra que causa que la energía sísmica se pierda como calor. Esta distribución puede ser descrita en términos de una Q , o atenuación anelástica, con una estructura análoga a aquella de las velocidades elásticas. Como resultado, se habla de Q de ondas superficiales y ondas de cuerpo. También se habla de la variación dentro de la Tierra de Q_α y Q_β , que controla la atenuación de ondas P y S . La estructura anelástica de la Tierra, contiene variaciones en Q_α y Q_β , es análoga a la estructura de velocidades elásticas porque Q puede verse matemáticamente como la parte imaginaria de la velocidad. Para observar esto, note que la ec. (4.8), que es usada para derivar el decaimiento en la oscilación, puede ser vista como una oscilación con un frecuencia compleja p

$$u(t) = A_0 e^{ipt} = A_0 e^{i(a+ib)t} \quad (4.22)$$

donde la parte real e imaginaria de la frecuencia son

$$a = \omega \quad b = \omega^* = \frac{\omega_0}{2Q} \approx \frac{\omega}{2Q} \quad (4.23)$$

asumiendo que la atenuación es lo suficientemente pequeña (Q es grande) para que $\omega \approx \omega_0$. Entonces se escribe

$$Q^{-1} = 2b/a = 2\omega^*/\omega. \quad (4.24)$$

Tratando a la atenuación como una parte imaginaria de la frecuencia y dividiendo por el número de onda, se tiene que la velocidad correspondiente de una onda que se propaga es compleja,

$$c + ic^* = \omega/k + i\omega^*/k = \omega/k + i\omega Q^{-1}/(2k), \quad (4.25)$$

entonces

$$Q^{-1} = 2c^*/c. \quad (4.26)$$

Por lo tanto, se puede representar la atenuación de ondas P y S utilizando los factores de calidad Q_α y Q_β para obtener las partes imaginarias de las velocidades. Si no existe atenuación ($Q = \infty$), la frecuencia y la velocidad no tienen partes imaginarias. Esta formulación es útil porque implica que los métodos usados para invertir las velocidades de las ondas superficiales o los modos normales para encontrar la velocidad en la Tierra pueden ser usados para invertir observaciones de la atenuación y así encontrar la distribución anelástica.

Se puede escribir la parte imaginaria de las velocidades en términos de las propiedades del material que causan la atenuación, considerando que el módulo elástico tenga componentes imaginarios. Para la velocidad de corte

$$\begin{aligned}\beta + i\beta^* &= \beta(1 + iQ_\beta^{-1}/2) \\ &= ((\mu + i\mu^*)/\rho)^{1/2} = \beta(1 + i\mu^*/\mu)^{1/2} \\ &\approx \beta(1 + i\mu^*/(2\mu))\end{aligned}\quad (4.27)$$

donde para el último paso se usó el primer término de la serie de Taylor, porque la atenuación y por ende la parte imaginaria es pequeña. Comparando términos se muestra que

$$Q_\beta^{-1} = \mu^*/\mu. \quad (4.28)$$

Un análisis similar muestra que el factor de calidad para ondas P es dado por las partes imaginarias de los módulos de compresibilidad y de corte

$$Q_\alpha^{-1} = (K^* + 4/(3\mu^*)) / (K + 4/(3\mu)). \quad (4.29)$$

Desde una perspectiva física, es útil pensar que la energía se pierde en la deformación compresional o de corte, por lo que se puede expresar la atenuación en términos de las partes imaginarias de la compresibilidad y rigidez

$$Q_K^{-1} = K^*/K \quad Q_\mu^{-1} = \mu^*/\mu = Q_\beta^{-1}. \quad (4.30)$$

Estos factores de calidad están relacionados a aquellos de las velocidades por

$$Q_\alpha^{-1} = LQ_\mu^{-1} + (1 - L)Q_K^{-1} \quad L = (4/3)(\beta/\alpha)^2. \quad (4.31)$$

En general poca energía se pierde en compresión, por lo que Q_K^{-1} es muy pequeño, y la mayor parte de la atenuación de las ondas ocurre en cizalla, haciendo $Q_\alpha^{-1} \approx (4/9)Q_\beta^{-1}$.

Técnicas para medir Q en la Tierra siguen el principio del decaimiento de una oscilación. De la ec. (4.19) se toma el logaritmo natural de la envolvente para mostrar que

$$\ln A(t) = \ln A_0 - \omega_0 t / (2Q), \quad (4.32)$$

tal que se puede encontrar Q como la pendiente de decaimiento logarítmico. De forma alternativa, si cimas sucesivas distanciadas por un periodo ($T = 2\pi/\omega_0$) tienen amplitudes

$$\begin{aligned}A_1(t_1) &= A_0 \exp(-\omega_0 t_1 / (2Q)) \\ A_2(t_1 + T) &= A_0 \exp(-\omega_0 (t_1 + T) / (2Q))\end{aligned}\quad (4.33)$$

su razón es

$$A_1/A_2 = \exp[-\omega_0 t_1 / (2Q) + \omega_0 (t_1 + T) / (2Q)] = \exp(\pi/Q), \quad (4.34)$$

tal que

$$Q = \pi / \ln(A_1/A_2). \quad (4.35)$$

Para ilustrar esta aproximación, note que en la Fig. 59 la segunda cima, en $\omega t = 2\pi$, es aproximadamente dos tercios de la primera cima, en $\omega t = 0$. Entonces $Q \approx \pi / \ln(3/2) \approx 8$. Esto es pequeño comparado con la Q de las rocas del manto, que varían dentro del rango 200 – 500, pero comparable con el de algunas rocas sedimentarias. Por ejemplo, ondas S en esquistos tienen $Q \approx 10$.

Otra forma de ver a Q es como el número de ciclos que se requieren para que la oscilación decaiga a cierto nivel. El número de ciclos n , es

$$n = t/T = \omega t / (2\pi) \approx \omega_0 t / (2\pi), \quad (4.36)$$

donde la última aproximación, basada en la ec. (4.16), asume que la atenuación es lo suficientemente pequeña ($Q \gg 1$) para que $\omega \approx \omega_0$.

La amplitud al tiempo t_n , después de n ciclos, es

$$A(t_n) \approx A_0 e^{-\frac{n\pi}{Q}}, \quad (4.37)$$

de modo, que si se define a n igual a Q ,

$$A(t_n) \approx A_0 e^{-\pi} \approx 0.04 A_0. \quad (4.38)$$

Por lo tanto, después de Q ciclos, la amplitud decae a un valor de $e^{-\pi}$ o 4 % de la amplitud original. Por lo tanto, en la Fig. 59, más del 95 % de la amplitud se pierde después de $Q \approx 8$ ciclos.

Q puede describir el decaimiento de la oscilación en tiempo o espacio. Para ondas que se propagan, se reemplaza t con x/c , donde x es la distancia viajada y c es la velocidad. De modo que la ec. (4.19) se convierte en

$$A(x) = A_0 e^{-\frac{\omega_0 x}{2cQ}}, \quad (4.39)$$

que describe como la amplitud decae con la distancia recorrida por las ondas.

Cuando estas técnicas son usadas para medir Q del registro de ondas sísmicas, se encuentra que Q varía con la frecuencia (Fig. 60). Q es esencialmente constante para bajas frecuencias, en el rango de 0.001 a 0.1 Hz, pero después se incrementa con la frecuencia. En muchas aplicaciones es útil considerar que Q es independiente de la frecuencia.

Es importante notar que el modelo de un oscilador amortiguado asume que la atenuación es *lineal*, i.e. Q es independiente de la amplitud de la onda. Esto es lo mismo que asumir que las amplitudes no son demasiado grandes. En la mayoría de las rocas, esta condición se satisface si las deformaciones involucradas con la propagación de onda son menores que 10^{-6} aproximadamente. A pesar de que esto es cierto para distancias telesísmicas, no es el caso cerca del terremoto o una explosión, donde la deformación elástica puede exceder valores de 10^{-4} . Grandes terremotos pueden causar grandes deformaciones, y por ende una región de atenuación no lineal.

A continuación se estudiará que la atenuación induce dispersión.

4.4. Dispersión física debido a la atenuación

Una importante consecuencia de la atenuación de ondas sísmicas es la *dispersión física*, por la cual, ondas con diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades.

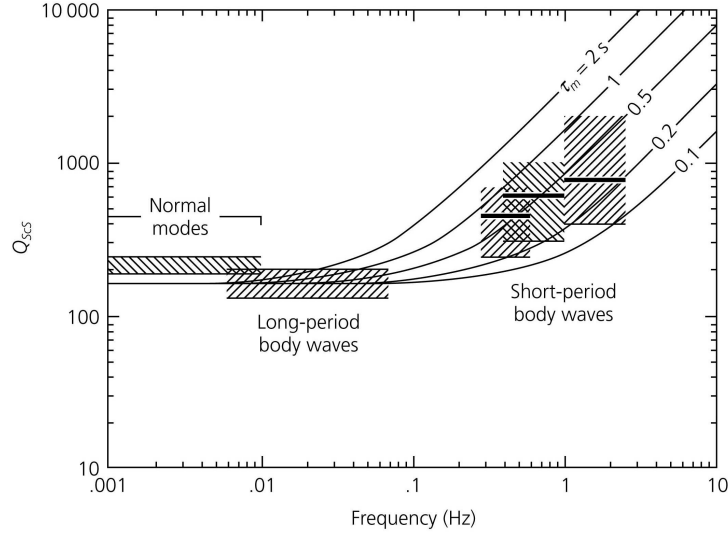


Figura 60: La atenuación de ondas sísmicas en el manto depende de la frecuencia. Se muestra el valor Q calculado con ondas ScS . Imagen tomada de Stein y Wyession (2003).

Esta se difiere de la *dispersión geométrica* discutida en la Sección 3.4, en donde las ondas superficiales con frecuencias diferentes tienen velocidades aparentes en la superficie porque estas muestrean diferentes profundidades y encuentran materiales con velocidades diferentes. De modo, que a pesar de que la velocidad intrínseca de la roca a cualquier profundidad es tratada como independiente de la frecuencia, la dispersión ocurre porque la velocidad del material varía con la profundidad. Por el contrario, con la dispersión física la velocidad intrínseca de las ondas en un medio varía con la frecuencia¹⁷.

Para notar como la dispersión física resulta de la atenuación, considere como la onda sísmica cambia su forma. Asuma que una onda delta, un pulso de altura infinita y área unitaria (Fig. 61), se propaga a través de un medio elástico homogéneo con una velocidad intrínseca c :

$$u(x, t) = \delta(t - x/c). \quad (4.40)$$

La transformada de Fourier de la función delta

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - x/c) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega x/c}, \quad (4.41)$$

muestra que la función delta está constituida por ondas de todas las frecuencias. Si no existiera dispersión, todas las frecuencias viajarían a la misma velocidad y lle-

¹⁷El arcoiris es resultado de la dispersión física de ondas de luz que pasan a través de gotas de agua en la atmósfera o un prisma. La distintas frecuencias (colores) de la luz viajan a velocidades diferentes a través del agua o el prisma, y se refractan con ángulos diferentes, separando la luz blanca inicial en diferentes colores.

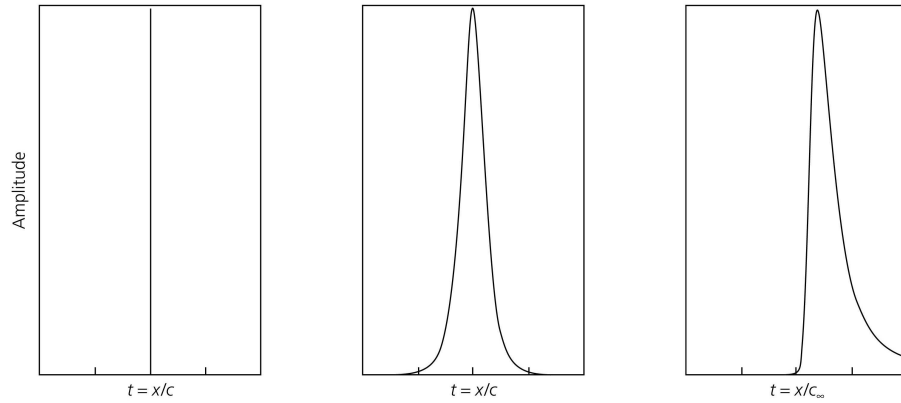


Figura 61: *Izquierda*: Una onda pulso que se propaga compuesta de una función delta. Sin dispersión, todas las frecuencias viajan a la misma velocidad. *Centro*: La función delta después de la atenuación se ensancha, mostrando que algo de energía arriba antes que el tiempo de arribo de altas frecuencias. *Derecha*: El pulso incluyendo dispersión física, hace que las ondas de bajas frecuencias viajen más lentamente, de modo que no arriban antes que el componente de altas frecuencias. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

garían al mismo tiempo. El efecto de la atenuación como función de la distancia está dado al escribir la ec. (4.39) como función de la frecuencia

$$A(\omega) = e^{-\frac{\omega x}{2cQ}}, \quad (4.42)$$

que muestra que si Q es constante, la tasa a la cual la amplitud decae con la distancia se incrementa rápidamente con la frecuencia. Para notar como la atenuación afecta un onda delta, se multiplica la ec. (4.41) por la ec. (4.42) y se usa la transformada inversa de Fourier para regresar al dominio del tiempo

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega x}{2cQ}} e^{-\frac{i\omega x}{c}} e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.43)$$

Evalutando la integral se tiene

$$u(x, t) = \left[\left(\frac{x}{2cQ} \right) / \left(\left(\frac{x}{2cQ} \right)^2 + \left(\frac{x}{c} - t \right)^2 \right) \right] / \pi, \quad (4.44)$$

de modo que la función delta se ensancha por la atenuación en una onduleta que es simétrica en tiempo con su máximo en $t = x/c$ (Fig. 61, *centro*).

Un problema con esta solución es que la energía sísmica arriba antes que el tiempo de viaje geométrico de la onda delta, $t = x/c$, que es el tiempo de arribo del componente de altas frecuencias. De hecho, como las colas de la onduleta se extienden al infinito a ambos lados de $t = x/c$, algo de la energía arribaría antes de que el terremoto ocurriera. Esta situación imposible, llamada *no-causal*, resulta del hecho que la atenuación

ensancha el pulso al remover de manera preferente las altas frecuencias.

De modo que los mecanismos físicos que causan la atenuación en la Tierra deben prevenir que las ondas de todas las frecuencias viajen a la misma velocidad. Entonces, debe haber dispersión, donde las bajas frecuencias viajan más lentamente y arriban después. Se observó en la Sección 3.5 que en un medio dispersivo se distingue la velocidad de fase c , la velocidad de onda de una sola frecuencia, de la velocidad de grupo que describe la velocidad de un grupo de ondas. Tal que la condición matemática de la causalidad es que $u(x, t) = 0$ para todo $t < x/c_\infty$, donde $c_\infty = c(\infty)$ es la velocidad de fase de las ondas con frecuencia infinita que arriban primero. Una relación de dispersión para la velocidad de fase como una función de la frecuencia, llamada ley de atenuación de Azimi, es

$$c(\omega) = c_0 \left[1 + \frac{1}{\pi Q} \ln \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right], \quad (4.45)$$

donde c_0 es la velocidad de referencia que corresponde a la frecuencia de referencia ω_0 . Esta relación provee la causalidad necesaria, porque el pulso resultante (Fig. 61, *derecha*) tiene altas frecuencias que arriban en $t = s/c_\infty$, mientras que las bajas frecuencias arriban después con una duración que depende del valor de Q . Si no existe atenuación ($Q = \infty$), la ec. (4.45) no produce dispersión y la función delta no es ensanchada.

De la ec. (4.45), las velocidades de las ondas P y S , α y β , varían en función del periodo T como

$$\begin{aligned} \beta(T) &= \beta(1) \left(1 - \frac{\ln T}{\pi} Q_\mu^{-1} \right), \\ \alpha(T) &= \alpha(1) \left[1 - \frac{\ln T}{\pi} (L Q_\mu^{-1} + (1 - L) Q_K^{-1}) \right], \\ \text{donde} \quad L &= \frac{4}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde $\alpha(1)$ y $\beta(1)$ son las velocidades a 1 s. Entonces se pueden encontrar las diferencias de los tiempos de viaje de ondas con distinto periodo al integrar a lo largo de la trayectoria de rayo. Este efecto puede ser significativo. Para una onda ScS vertical, el tiempo de viaje para un onda con $T = 40$ s es 5 s más lento que para la onda con $T = 1$ s. De un tiempo de viaje total cercano a 934 s, esta diferencia es de 0.5 %. Para ondas PcP verticales con los mismos periodos, la diferencia del tiempo de viaje es de 1 s de 511 s (0.2 %). Este fenómeno genera discrepancias entre las estructuras de velocidad sísmica encontradas al invertir observaciones de modos normales de periodos grandes con respecto a ondas de cuerpo de periodo pequeños. Las velocidades inferidas de los modos normales son consistentemente más pequeñas que aquellas obtenidas de ondas de cuerpo. Esta discrepancia refleja el hecho de que la atenuación causa que las ondas de periodos grandes viajen a velocidades más lentas que las ondas de cuerpo. No considerar este efecto conduce a errores en la predicción de los tiempos de arribo de ondas de cuerpo por varios segundos.

El pulso en la Fig. 61 (*derecha*) es llamado también *operador de atenuación* y puede

ser usado para modelar los efectos de atenuación en las formas de onda sísmica. Un sismograma sintético calculado considerando una Tierra elástica puede ser convolucionado con el operador de atenuación para crear un pulso más realista.

La atenuación de ondas de cuerpo es comúnmente caracterizada usando el parámetro t^* . Si el rayo viaja a través de una región de Q constante,

$$t^* = \frac{t}{Q} = \frac{\text{tiempo de viaje}}{\text{factor de calidad}}. \quad (4.47)$$

Como Q varía dentro de la Tierra, se obtiene t^* al integrar a lo largo de la trayectoria de rayo,

$$t^* = \int \frac{dt}{Q} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta t_i}{Q_i}, \quad (4.48)$$

donde Δt_i y Q_i son los tiempos de viaje y los factores de calidad para el i -ésimo segmento del trayecto. Para ondas P , t_α^* es aproximadamente 1 s, mientras que para ondas S el valor típico de t_β^* es cercano a 4 s. Los valores de t^* se incrementan conforme se incrementa la distancia, pero también están afectados por el número de pasajes a través de la astenósfera (a 80 – 220 km de profundidad). Mientras mayor sea t^* , mayor será la atenuación.

A. Apéndice

A.1. Transformación de coordenadas

Los vectores son entidades son magnitudes físicas que permanecen iguales sin importar el sistema coordenado en el que fueron definidos, aunque sus componentes difieren entre sistemas coordenados. Por lo tanto, los vectores pueden ser definidos en un sistema de coordenadas y reexpresados en otro. Esta propiedad es muy útil para resolver problemas y revela el valor de la naturaleza de los vectores.

Para definir la relación entre los componentes del vector y el sistema de coordenadas, considere dos sistemas cartesianos ortogonales (Fig. 62). Como el origen es el mismo, un sistema de coordenadas puede ser obtenido al rotar el otro a través de tres ángulos. La relación entre los dos conjuntos de vectores base, $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, y $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$, está dada por sus productos escalares, llamados *cosenos directores*,

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j = \cos \alpha_{ij} = a_{ij}, \quad (A.1)$$

donde los ángulos α_{ij} son los ángulos entre los dos conjuntos de ejes.

Un vector puede ser expresado en términos de sus componentes en los dos sistemas coordenados

$$\underline{u} = u_1 \hat{e}_1 + u_2 \hat{e}_2 + u_3 \hat{e}_3 = u'_1 \hat{e}'_1 + u'_2 \hat{e}'_2 + u'_3 \hat{e}'_3 \quad (A.2)$$

Dados los componentes u_i en el sistema original, los componentes u'_i en el sistema primo son encontrados al tomar los productos escalares del vector con la base de vectores

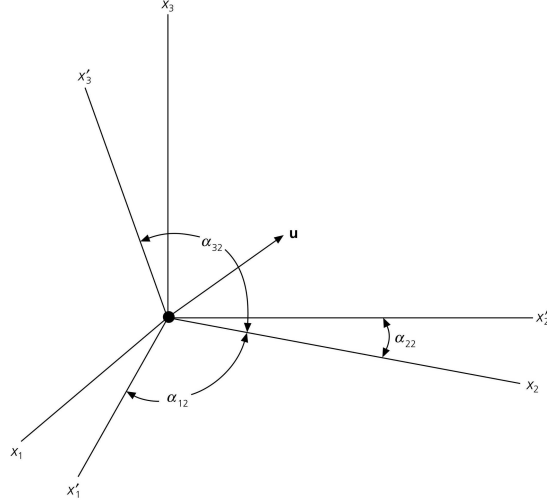


Figura 62: Relación entre sistemas coordenados. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

del sistema primo

$$\begin{aligned}
 u'_1 &= \hat{\underline{e}}'_1 \cdot \underline{u} = (\hat{\underline{e}}'_1 \cdot \hat{\underline{e}}_1)u_1 + (\hat{\underline{e}}'_1 \cdot \hat{\underline{e}}_2)u_2 + (\hat{\underline{e}}'_1 \cdot \hat{\underline{e}}_3)u_3 \\
 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3, \\
 u'_2 &= \hat{\underline{e}}'_2 \cdot \underline{u} = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3, \\
 u'_3 &= \hat{\underline{e}}'_3 \cdot \underline{u} = a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3,
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

que puede escribirse de forma matricial como

$$\underline{u}' = \underline{A}\underline{u}, \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

donde $\underline{A}$ es la matriz que transforma un vector del sistema original al sistema primo.

Note que esto no es una relación entre dos vectores diferentes $\underline{u}$ y $\underline{u}'$ sino una relación entre los componentes del mismo vector en dos sistemas coordenados. La matriz $\underline{A}$ es única y describe la transformación entre estos sistemas de coordenadas.

Se puede también revertir la transformación. Por analogía a la ec. (A.3), los componentes en el sistema original pueden ser encontrados a partir de aquellos en el sistema primo como

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \hat{\underline{e}}_1 \cdot \underline{u}' = (\hat{\underline{e}}_1 \cdot \hat{\underline{e}}'_1)u'_1 + (\hat{\underline{e}}_1 \cdot \hat{\underline{e}}'_2)u'_2 + (\hat{\underline{e}}_1 \cdot \hat{\underline{e}}'_3)u'_3 \\
 &= a_{11}u'_1 + a_{21}u'_2 + a_{31}u'_3, \\
 u_2 &= \hat{\underline{e}}_2 \cdot \underline{u}' = a_{12}u'_1 + a_{22}u'_2 + a_{32}u'_3, \\
 u_3 &= \hat{\underline{e}}_3 \cdot \underline{u}' = a_{13}u'_1 + a_{23}u'_2 + a_{33}u'_3.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Combinando las ecuaciones, se puede escribir la transformación inversa en forma matricial

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

que muestra que la transformación inversa es simplemente la transpuesta de la matriz $\underline{A}$

$$\underline{u} = \underline{A}^T \underline{u}'. \quad (\text{A.7})$$

De forma alternativa, la transformación inversa puede encontrarse multiplicando por la matriz inversa

$$\underline{A}^{-1} \underline{u}' = \underline{A}^{-1} \underline{A} \underline{u} = \underline{I} \underline{u} = \underline{u}. \quad (\text{A.8})$$

De modo que la inversa de la matriz de transformación es igual a su transpuesta, de modo que la matriz de transformación es una matriz ortogonal. Esto resulta razonable porque tanto las columnas como las filas de $\underline{A}$ son ortogonales. Como resultado estas transformaciones de coordenadas son llamadas *transformaciones ortogonales*.

Referencias

Stein, S. y Wysession, M. (2003). An Introduction to Seismology, Earthquakes and Earth Structure. Blackwell Publishing.